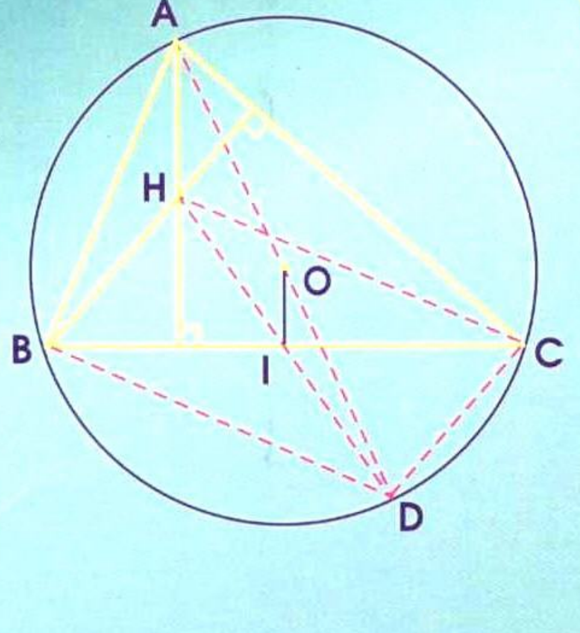
PHẠM QUỐC PHONG

Bồi dưỡng
HÌNH HỌC
LỚP 10

- Dùng cho học sinh ban Khoa học Tự nhiên
- Ôn luyện thi vào Đại học & Cao đẳng



NXB ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẠM QUỐC PHONG

BỒI DƯỠNG
HÌNH HỌC
LỚP 10

- *Dùng cho học sinh ban Khoa học Tự nhiên*
- *Ôn luyện thi vào Đại học, Cao đẳng*

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

- *Làm thế nào để học tốt môn Hình học lớp 10 ?*

  Xin nêu một cách là bạn hãy trình bày được các vấn đề dưới đây :

  – Các kiến thức cơ bản nhất.

  – Các bài toán cơ bản, các bài toán thường gặp của chương.

  – Những thuật toán, các kĩ thuật để giải bài toán đó.

- BỒI DƯỠNG HÌNH HỌC LỚP 10 các bạn đang cầm trong tay là cuốn tài liệu trình bày theo tư tưởng ấy.

Với hệ thống thí dụ được chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tối đa các góc cạnh của mỗi phần kiến thức sẽ giúp các bạn nắm vững nội dung chương trình.

Thứ tự thí dụ được trình bày theo trật tự từ *cơ bản* đến *nâng cao*, từ những bài toán *đơn giản* đến bài toán *phối hợp nhiều kĩ năng*.

Cắt nghĩa phương pháp giải, vạch rõ bản chất bài toán, bản chất lời giải, liên kết–xâu chuỗi các bài toán là vị trí của những lời bình.

Sách có ba chương được biên soạn sát đúng với kiến thức chương trình hình học lớp 10 của bộ GD&ĐT bắt đầu áp dụng từ năm 2007 để các em học sinh thuận lợi ôn tập, củng cố kiến thức của mình sau mỗi buổi học trên lớp. Tất cả các chứng minh nêu trong sách được khai thác từ những kiến thức cơ bản được biên soạn trong SGK. Phần về sau của mỗi § trong cuốn tài liệu này thường là những thí dụ dẫn dắt các bạn có nguyện vọng mở rộng giới hạn hiểu biết của mình.

- Hi vọng cuốn sách là tài liệu bổ ích góp phần nâng cao kiến thức cho mỗi người sử dụng nó.

Mặc dù đã rất cố gắng, cuốn sách vẫn có thể còn những hạn chế và thiếu sót bởi kinh nghiệm và sự hiểu biết. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả theo địa chỉ sau đây.

Bà Hoàng Thị Tế
Số nhà : 239, đường Nguyễn Ái Quốc, thị xã Hồng Lĩnh, tỉnh Hà Tĩnh.
Điện thoại : 039.835713

- Cuối cùng xin trân trọng biết ơn GSTSKH Phan Huy Khải, bởi những lời khích lệ của thầy là nguồn sinh lực cho tôi viết nên những trang tài liệu này.

Hà Tĩnh, tháng 4 năm 2006
TÁC GIẢ
Phạm Quốc Phong

CHƯƠNG I

VECTƠ

§1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho trước véc tơ $\vec{a}$ và một điểm I. Tồn tại duy nhất một điểm A sao cho $\overrightarrow{IA} = \vec{a}$

Như vậy: biết $\vec{a}$, điểm I và $\overrightarrow{IA} = \vec{a}$ thì điểm A xem là đã dựng được.

2. Phép cộng và trừ

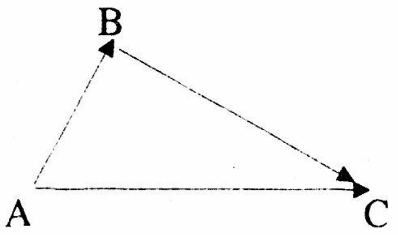
a) Quy tắc ba điểm :

Cộng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (với mọi A, B, C) (h 1.1)

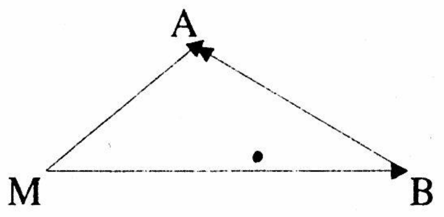
Hiệu hai vectơ *chung gốc* : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ (với mọi A, B, M) (h 1.2)

Hiệu hai vectơ *chung ngọn* : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ (với mọi A, B, M) (h 1.3)

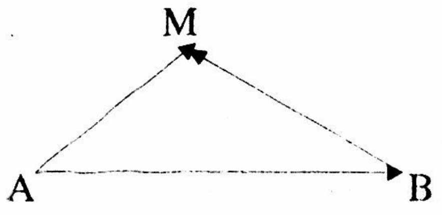
Trung điểm : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ (h 1.4)



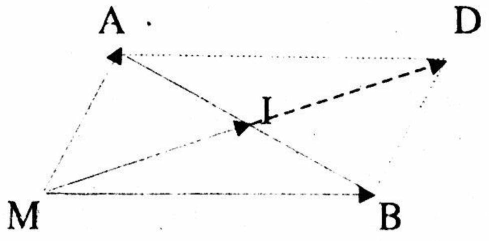
Hình 1.1



Hình 1.2



Hình 1.3



Hình 1.4

b) Tính chất của vectơ không : Với mọi vectơ $\vec{a}$ ta có $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

c) Tính chất giao hoán : Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ ta có $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

d) Tính chất kết hợp : Với ba vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta có

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

3. Phép nhân vectơ với một số

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có

a) $k(l\vec{a}) = (k.l)\vec{a}$

b) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{b}$

c) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

d) $1.\vec{a} = \vec{a}$, $0.\vec{a} = \vec{0}$, $k.\vec{0} = \vec{0}$, . $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{array}\right.$

e) Cho trước hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương và $\vec{a} \neq \vec{0}$, thì tồn tại duy nhất một số thực k sao cho $\vec{b} = k.\vec{a}$
- Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương thì
  * $k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $k = l = 0$
  * Với mọi $\vec{u}$, luôn tồn tại một cặp số (x; y) duy nhất sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$

§2. BÀI TOÁN VÀ THÍ DỤ

Bài toán 1

Hai vectơ không cùng phương

Thí dụ 1

Cho tam giác ΔABC.Tìm cặp số (x, y) trong mỗi trường hợp sau :

1) $(x+y-2)\overrightarrow{AB} + (x-2y)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

2) $(x^2-9)\overrightarrow{AB} + (x+y+1)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

3) $(x+y+a-1)\overrightarrow{AB} + (2xy-5-a^2-2a)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, a là số thực cho trước.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ không cùng phương . Do vậy

1) Ta có $(x+y-2)\overrightarrow{AB} + (x-2y)\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$. Vậy $\left(x = \dfrac{4}{3}; y = \dfrac{2}{3}\right)$ là cặp số duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

2) Ta có $(x^2-9)\overrightarrow{AB} + (x+y+1)\overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_1 = 3;\ y_1 = -4) \\ (x_2 = -3;\ y_2 = 2) \end{array}\right.$. Đó là tập hợp cặp số (x, y) thoả mãn yêu cầu bài toán.

3) Ta có $(x+y+a-1)\overrightarrow{AB} + (2xy-5-a^2-2a)\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+a-1=0 \\ 2xy-5-a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1-a \\ 2xy=a^2+2a+5 \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ (2) có nghiệm khi và chỉ khi $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (1-a)^2 \geq 2(a^2+2a+5) \Leftrightarrow (a+3)^2 \leq 0$

Bởi thế nên : * $a \neq -3$, (2) vô nghiệm

* $a = -3$ ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Tóm lại
- $a \neq -3$, không tồn tại cặp số $(x; y)$ thoả mãn hệ thức đã cho.
- $a = -3$, $(x = y = 2)$ là cặp số duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán

Thí dụ 2

Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ đôi một không cùng phương và x, y, z, x', y', z', $x \neq 0$, $x' \neq 0$ là các số thực thoả mãn

$$(*)\begin{cases} x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} & (1) \\ x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$.

Lời giải

Do $x \neq 0$, $x' \neq 0$ suy ra y, z, y', z' cũng khác không. Thật vậy, giả sử $y = 0$, ta có $x\vec{a} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow z = x = 0$ (do $\vec{a}$ khác phương với $\vec{c}$) mâu thuẫn với $x \neq 0$.

Nhân đẳng thức (1) với $x' \neq 0$, nhân đẳng thức (2) với $x \neq 0$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x'x\vec{a} + x'y\vec{b} + x'z\vec{c} = \vec{0} \\ xx'\vec{a} + xy'\vec{b} + xz'\vec{c} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow (xx' - xx')\vec{a} + (x'y - xy')\vec{b} + (x'z - xz')\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (x'y - xy')\vec{b} + (x'z - xz')\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x'y - xy' = 0 \\ x'z - xz' = 0 \end{cases} \text{(do } \vec{b} \text{ khác phương với } \vec{c}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \text{ (đpcm)}$$

Thí dụ 3.

Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm, I là trung điểm BC, M là một điểm bất kì.

a) Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

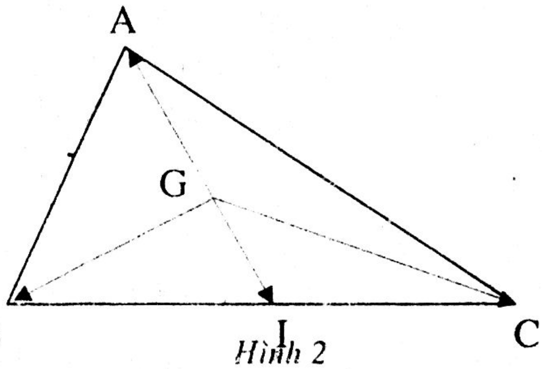
Lời giải

a) Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (h2)

Cách 1: Ta có

- I là trung điểm BC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$
- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (đpcm)



Hình 2

Cách 2 : G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G \in AI$. Do vậy theo kết quả câu a) suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = k\overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (1 + k)\overrightarrow{GA}$ hay $\vec{u} = (1 + k)\overrightarrow{GA}$ (1)

Tương tự $\vec{u} = (1 + l)\overrightarrow{GB}$ (2)

Do $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ không cùng phương nên từ (1) và (2) suy ra $\vec{u} = \vec{0}$ (đpcm)

b) Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \vec{0} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

$= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$ (đpcm)

Lời bình 1.

Kết quả đáng nhớ :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{G là trọng tâm } \Delta ABC} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \\ \text{(với mọi M)}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

Lời bình 2.

Trong câu b) bài trên, lời giải theo cách 2 tuy không gọn hơn cách 1, nhưng điều muốn nói ở đây là :

Để chứng minh một vectơ nào đó là vectơ không (chẳng hạn $\vec{u} = \vec{0}$*) có thể làm theo bốn cách : Chứng tỏ* $|\vec{u}| = 0$ *hoặc* $\vec{u} = \vec{a} + (-\vec{a})$ *hoặc* $\vec{u}$ *cùng phương với hai vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$ *hoặc các hình chiếu của* $\vec{u}$ *trên cả* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *đều là véc tơ không, trong đó* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *là hai vectơ không cùng phương.*

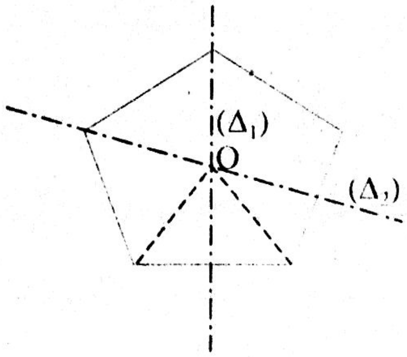
Các bạn theo dõi ý tưởng đó trong thí dụ sau đây.

Thí dụ 4

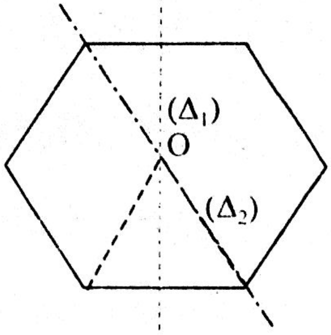
Cho đa giác đều n (n ≥ 3) cạnh $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ nội tiếp đường tròn tâm O.

Gọi $\vec{u} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$. Chứng minh $\vec{u} = \vec{0}$

Lời giải



Hình 3.1



Hình 3.2

Do $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ là đa giác đều => $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ có không ít hơn hai trục đối xứng. Gọi Δ_1 là một trục đối của nó, hiển nhiên $O \in \Delta_1$. Rõ ràng các đỉnh của đa giác đều hoặc thuộc Δ_1 hoặc sắp thành từng cặp đối xứng với nhau qua Δ_1 hay Δ_1 cắt đoạn thẳng nối chúng tại trung điểm của nó. Từ đó suy ra $\vec{u}$ cùng phương với

Δ_1. Tương tự $\vec{u}$ cùng phương với Δ_2 trong đó Δ_2 là một trục đối xứng của đa giác đều khác với Δ_1. Điều đó chứng tỏ $\vec{u} = \vec{0}$.

Chú ý

Trong trường hợp đa giác đều có chẵn số đỉnh, bạn có thể sắp xếp $\vec{u}$ thành tổng từng cặp véc tơ đối nhau, từ đó suy ra $\vec{u} = \vec{0}$

Bài toán 2

Xác định điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước

Ta biết rằng :

- Cho trước véc tơ $\vec{a}$ và một điểm I. Tồn tại duy nhất một điểm K sao cho $\overrightarrow{IK} = \vec{a}$
- Cho trước véc tơ $\vec{a}$ và một điểm I. Điểm K thoả mãn $\overrightarrow{IK} = \vec{a}$ xem là đã dựng được.
- Cho trước hai điểm phân biệt A và B và một số thực $\alpha \neq 1$.

Luôn tồn tại duy nhất một điểm J thoả mãn $\overrightarrow{JA} = \alpha\overrightarrow{JB}$

Người ta nói : J là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\alpha \neq 1$

Điểm J ấy được xác định như sau : $\overrightarrow{JA} = \alpha\overrightarrow{JB} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} = \alpha(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB})$

$\Leftrightarrow (1-\alpha)\overrightarrow{JA} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{AB}}{\alpha - 1}$ (do $\alpha \neq 1$). Đó là hệ thức xác định điểm J.

- Nếu J là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $\alpha \neq 1$ tức là $\overrightarrow{JA} - \alpha\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ thì với mọi điểm M luôn có $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB}}{1 - \alpha}$.

Thí dụ 5

Cho tam giác ABC. Xác định điểm J trong mỗi trường hợp sau :

1) $2\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} = \vec{0}$

2) $3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

3) $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JB} + 5\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải

1) Ta có $2\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + (\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

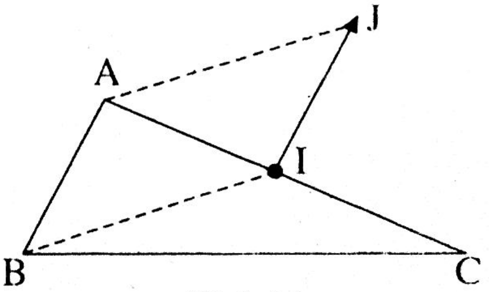
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ J là điểm đối xứng của B qua A

(*Chú ý* : Theo (2*) ta có $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{-1.\overrightarrow{AB}}{2-1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BA}$. Tuy vậy lời giải phải trình bày cụ thể như trên).

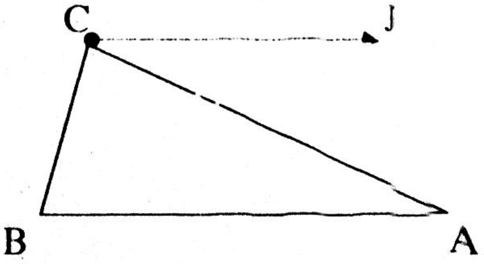
2) $3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB}) + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (1*)

Gọi I là trung điểm AC, ta có $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JI}$ nên (1*) $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{JI} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ J là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABIJ. (h 4.1)



Hình 4.1



Hình 4..2

3) $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JB} + 5\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JB} + 5\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC}$

$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB}) + 4\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ (1*)

(1*) là hệ thức xác định J. (h 4.2)

Thí dụ 6

Cho phân điểm A, B và ba số thực α, β, γ có $\alpha + \beta \neq 0$.

a) Tìm tập hợp các điểm J sao cho $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} = \vec{0}$. (1)

b) M, N là hai điểm thay đổi thoả mãn hệ thức $\gamma\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$. (2)
Chứng minh khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

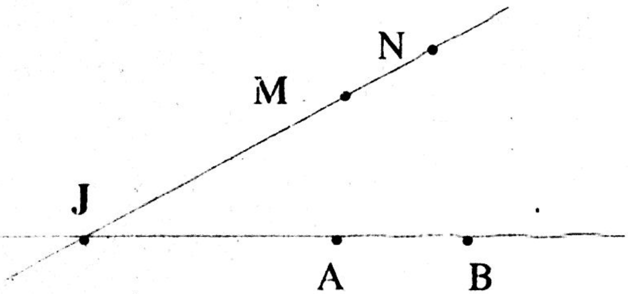
Lời giải

a) $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} = \vec{0}$. $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{JA} + \beta(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AJ} = \beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{\beta\overrightarrow{AB}}{\alpha+\beta}$ (do $\alpha + \beta \neq 0$) (3)

Rõ ràng $\frac{\beta\overrightarrow{AB}}{\alpha+\beta}$ là một vectơ xác định nên đẳng thức (3) xác định duy nhất một điểm J.

Vậy tập hợp các điểm J sao cho $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} = \vec{0}$. là điểm J được xác định bởi $\overrightarrow{AJ} = \frac{\beta\overrightarrow{AB}}{\alpha+\beta}$.



Hình 5

b) Ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) + \beta(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA}) = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ} + (\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB})$.

Theo (1) : $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ nên $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ}$.

Do vậy (2) $\Leftrightarrow \gamma\overrightarrow{MN} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MN}$ (4)

Hệ thức (4) chứng tỏ M, N, J thẳng hàng hay đường thẳng MN luôn đi qua điểm J cố định (đpcm). (h5).

Chú ý 1.

- Điểm J thoả mãn hệ thức $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ (1*) được gọi là tâm tỉ cự của hai điểm A và B theo cặp số (α, β).

  Như vậy tâm tỉ cự của hai điểm A, B theo cặp số (α, β) là điểm J được xác định bởi $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ (2*)

- Với mọi M luôn có $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ}$. (3*)

  Hệ thức (3*) được gọi là *hệ thức rút gọn* của biểu thức vectơ.

- Tóm lại

$$\begin{tikzcd}
& \text{J- tâm tỉ cự của AB theo cặp số } (\alpha, \beta) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}=\vec{0} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MJ} \text{ (với mọi điểm M)}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \text{I là trung điểm AB} \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI} \text{ (với mọi M)}
\end{tikzcd}$$

- Khi $\alpha=\beta\neq 0$ ta có :

  (1*) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ J là trung điểm AB. Vậy trung điểm của đoạn thẳng AB là tâm tỉ cự của hai điểm A và B theo cặp số (1, 1)

  (3*) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MJ}$ với J là trung điểm AB.

  Các bạn thấy lại các kết quả quen thuộc về trung điểm.

Chú ý 2. Hệ quả của bài toán

Cho các điểm A,B, M, N, J và các số thực α, β, γ.

$$\boxed{\text{Nếu có } \begin{cases} \alpha\overrightarrow{JA}+\alpha\overrightarrow{JB}=\vec{0} & (1) \\ \alpha\overrightarrow{MA}+\alpha\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MN} & (2) \end{cases} \text{ thì M,N, J thẳng hàng.}}$$

Các đẳng thức (1), (2) theo thứ tự được gọi là *đẳng thức chủ*, *đẳng thức gánh*. Hệ quả trên dẫn ta đến một cách chứng minh ba điểm thẳng hàng được gọi là "*phương pháp tâm tỷ cự*".

Chú ý 3. Các kết quả trong thí dụ 3 không phải là định lí, nghĩa là khi sử dụng phải chứng minh.

Bài toán 3

Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm X, Y, Z thẳng hàng, ta chứng minh chúng (ba điểm ấy) tạo ra hai vectơ cùng phương (chẳng hạn đường thẳng $\overrightarrow{XY}$ *cùng phương với* $\overrightarrow{XZ}$ *)*

Thí dụ 7

Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thoả mãn $\begin{cases} \overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} & (1) \\ \overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0} & (2) \end{cases}$

Chứng minh ba điểm M, N, B thẳng hàng.

Lời giải

Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0} \\ \overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{BN} \end{cases}$. Trừ theo từng vế ta có $\overrightarrow{NM}+3\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{BN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow$ Ba điểm M, N, B thẳng hàng (đpcm)

Lời bình

- Bạn thấy lại điều nói trên ở chú ý 2.
- Giả sử ba điểm X, Y, Z được xác định bởi hệ các đẳng thức vectơ.

Cho X≡Y, nếu từ các giả thiết suy ra X≡Y≡Z thì ắt ba điểm X, Y, Z thẳng hàng. *Đó là một cách để kiểm tra ba điểm thẳng hàng*

Trong thí dụ trên ta có (2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC})+2\overrightarrow{NB}=\vec{0}$. Do (1) nên suy ra $\overrightarrow{NB}=\vec{0} \Leftrightarrow$ N ≡M≡B.

- Khi hệ các đẳng thức vectơ chứa ba điểm có một đẳng thức dạng $\alpha+\beta\overrightarrow{XB}=\vec{0}$

Một định hướng để chứng minh X, Y, Z thẳng hàng là sử dụng "*phương pháp tâm tỉ cự*". Từ các giả thiết đã có suy ra được một phương trình hệ quả dạng

$$\alpha\overrightarrow{YA}+\beta\overrightarrow{YB}=\gamma\overrightarrow{YZ} \text{ hoặc } \alpha\overrightarrow{ZA}+\beta\overrightarrow{ZB}=\gamma.\overrightarrow{YZ}.$$

Nói khác đi là biến đổi giả thiết thành một trong hai hệ

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{XA}+\beta\overrightarrow{XB}=\vec{0} & (1\#) \\ \alpha\overrightarrow{YA}+\beta\overrightarrow{YB}=\gamma\overrightarrow{YZ} & (2\#) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \alpha\overrightarrow{XA}+\beta\overrightarrow{XB}=\vec{0} & (1\#) \\ \alpha\overrightarrow{ZA}+\beta\overrightarrow{ZB}=\gamma\overrightarrow{YZ} & (2\#) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của hệ ta thu được đẳng thức vectơ cộng tuyến cần tìm.

Đẳng thức (1#) được gọi là "*đẳng thức chủ*".

Đẳng thức (2#) được gọi là "*đẳng thức gánh*".

Cần biết rằng trong một hệ có thể có nhiều đẳng thức có thể đóng vai trò là "*đẳng thức chủ*". (Trong thí dụ trên những điều đã nói thật quá rõ ràng). Các bạn theo dõi nhận xét này trong các thí dụ tiếp theo.

Thí dụ 8. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\begin{cases} \overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0} & (1) \\ 6\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0} & (2) \\ \overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=\vec{0} & (3) \end{cases}$

Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

(Mỗi đẳng thức (1), (2), (3) đều có thể đóng vai trò là đẳng thức chủ. Ta chọn một trong ba đẳng thức ấy làm đẳng thức chủ, chẳng hạn chọn (1). Việc phải làm là thiết lập hệ thức gánh $\gamma\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}$ *hoặc* $\gamma\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$ *)*

Cộng theo từng vế các đẳng thức (2) và (3) ta có $6\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{PA}+(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{NC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PN}=\vec{0} \Leftrightarrow 6(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PN})+2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PA}=5\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{PN}$ (*đẳng thức gánh phải tìm*) (4)

Trừ vế theo vế các đẳng thức (4) cho (3) ta có

$$(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{MA})+3(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{MB})=\frac{5}{2}\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}+3\overrightarrow{PM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{PN}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=\frac{5}{8}\overrightarrow{PN}$ $\Leftrightarrow$ Ba điểm M, N, P thẳng hàng. (đpcm)

Thí dụ 9

Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn $\begin{cases}\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC} & (1)\\ \overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0} & (2)\\ \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0} & (3)\end{cases}$

Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

(Mỗi đẳng thức (1), (2), (3) đều có thể đóng vai trò là đẳng thức chủ. Ta chọn một trong ba đẳng thức ấy làm đẳng thức chủ, chẳng hạn chọn (3). Việc phải làm là thiết lập hệ thức gánh $\gamma\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NB}$ *hoặc* $\gamma\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}$ *)*

Cộng theo từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta có $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}=3(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{NC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{MN}.$ (4)

((4) *là đẳng thức gánh phải tìm*). Trừ theo từng vế các đẳng thức (3) và (4) ta có:

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NA}-(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})=3\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{PB})+(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{PA})=3\overrightarrow{MN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=3\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{NP}=3\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP}=2\overrightarrow{MN}$ $\Leftrightarrow$ Ba điểm M, N, P thẳng hàng. (đpcm)

Thí dụ 10

Cho tam giác ABC và hai điểm M, N thoả mãn $\begin{cases}\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0} & (1)\\ 3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0} & (2)\end{cases}$

Chứng minh đường thẳng MN đi qua trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải

(Mỗi đẳng thức (1), (2) đều có thể đóng vai trò là đẳng thức chủ. Ta chọn một trong hai đẳng thức ấy làm đẳng thức chủ, chẳng hạn chọn (2). Việc phải làm là thiết lập hệ thức gánh $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=\gamma\overrightarrow{MG}$ *hoặc* $3\overrightarrow{QA}+2\overrightarrow{QC}=\gamma\overrightarrow{QC}$ *)*

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$ (3)

Ta có (1) $\Leftrightarrow\ 2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}$ thay vào (3) có $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$ (4)

((4) *là đẳng thức gánh phải tìm*). Trừ theo từng vế các đẳng thức (4) cho (3) ta có:

$3(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{NA})+2(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{NC})=6\overrightarrow{MG}\ \Leftrightarrow\ 3\overrightarrow{MN}+2\overrightarrow{MN}=6\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{MN}=\frac{6}{5}\overrightarrow{MG}$ $\Leftrightarrow$ Ba điểm M, N, G thẳng hàng, hay đường thẳng MN đi qua trọng tâm G của tam giác ABC. (đpcm)

Thí dụ 11. *(Bài toán gốc)*

Cho ba điểm A, B, C và ba số thực α, β, γ có $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

a) Tìm tập hợp các điểm J sao cho $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. (1)

b) Chứng minh với mọi điểm M luôn có :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MJ} \quad (2)$$

c) M, N là hai điểm thay đổi thoả mãn hệ thức

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} \quad (3)$$

Chứng minh khi M, N thay đổi, đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{JA}+\beta\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. (4)

Do $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ nên (4) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$ (5*)

Gọi $\vec{u}=\dfrac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$. Rõ ràng $\vec{u}$ là một vectơ xác định, A cố định nên có duy nhất một điểm J thoả mãn $\overrightarrow{AJ}=\vec{u}$. Vậy tập hợp các điểm J sao cho $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ là điểm J được xác định bởi $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$.

b) Ta có $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\alpha(\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JM})+\beta(\overrightarrow{JB}-\overrightarrow{JM})+\gamma(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JM})$

$=(\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC})-(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{JM}$

Theo trên $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

suy ra $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MJ}$ (đpcm)

c) Từ (2) suy ra $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MJ} \Rightarrow$ Ba điểm M, N, J thẳng hàng hay đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định J. (đpcm)

Chú ý 1.

- Điểm J thoả mãn hệ thức $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (1*)

được gọi là tâm tỉ cự của hệ ba điểm A, B, C theo bộ số (α, β, γ).

Như vậy tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo cặp số (α, β, γ) là điểm J được xác định bởi $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha + \beta + \gamma}$ (hoặc $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}}{\alpha + \beta + \gamma}$, $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}}{\alpha + \beta + \gamma}$) (2*)

- Với mọi M luôn có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MJ}$ (3*)

  Hệ thức (3*) được gọi là *hệ thức rút gọn* của biểu thức vectơ.

- Tóm lại

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{\begin{array}{c}\text{J- tâm tỉ cự của ba điểm A,B, C}\\ \text{theo bộ số } (\alpha, \beta, \gamma)\end{array}} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\boxed{\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} = \vec{0}} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \boxed{\begin{array}{c}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MJ}\\ \text{(với mọi điểm M)}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

- Khi $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$ ta có :

  (1*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ J là trọng tâm ΔABC. Vậy trọng tâm ΔABC là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (1, 1, 1)

  (3*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MJ}$

  Các bạn thấy lại các kết quả quen thuộc về trọng tâm tam giác.

Chú ý 2. Hệ quả bài toán

Cho các điểm A, B, C, M, N, J và các số thực α, β, γ, k .

Nếu có : $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} = \vec{0} & (1) \\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MN} & (2) \\ \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \end{cases}$ *thì ba điểm M, N, J thẳng hàng*

Các đẳng thức (1), (2) theo thứ tự được gọi là *đẳng thức chủ, đẳng thức gánh.*

Cũng như tâm tỉ cự đối với hệ hai điểm, hệ quả trên cho ta một cách chứng minh ba điểm thẳng hàng theo "*phương pháp tâm tỉ cự*".

Chú ý 3

Các kết quả trong thí dụ 3 không phải là định lý, nên khi sử dụng phải chứng minh.

Thí dụ 12 *(Bài toán gốc)*

Cho tam giác ABC. I là trung điểm BC. Gọi P, Q, R là các điểm xác định bởi :

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AI}\,,\ \overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC} \text{ với } pqr \neq 0.$$

1) Tìm điều kiện cần và đủ đối với p, q, r để P, Q, R thẳng hàng.

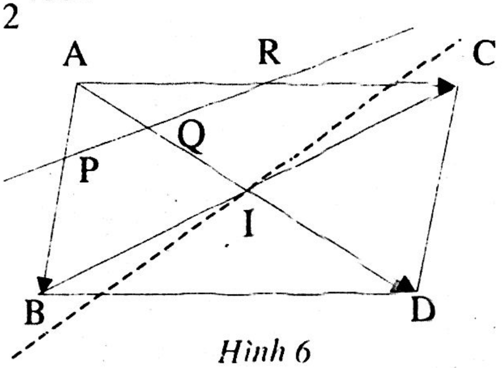
2) Gọi D là điểm đối xứng của A qua I. Tìm điều kiện cần và đủ đối với p, r để đường thẳng PR cắt hình bình hành ABDC thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Lời giải

1) (h6). Ta có $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = q\overrightarrow{AI} - p\overrightarrow{AB}$.

Mà $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ nên

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{q}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - p\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = (\frac{q}{2} - p)\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC}.$$



Hình 6

Ba điểm P, Q, R thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{PR}$

$$\Leftrightarrow (\frac{q}{2} - p)\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC} = m(r\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow (\frac{q}{2} - p + mp)\overrightarrow{AB} + (\frac{q}{2} - mr)\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (1)$$

Do $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{q}{2} - p + mp = 0 \\ \frac{q}{2} - mr = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{q}{2p} \\ m = \frac{q}{2r} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \frac{q}{2p} = \frac{q}{2r} \Leftrightarrow \frac{2}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

Vậy cần và đủ để ba điểm P, Q, R thẳng hàng là $\frac{2}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ (*)

2) Đường thẳng PR cắt hình bình hành ABD I thành hai phần có diện tích bằng nhau $\Leftrightarrow$ Đường thẳng PR đi qua tâm I của hình bình hành ABID hay ba điểm P, I, R thẳng hàng hay $Q \equiv I \Leftrightarrow q = 1$.

Thay vào (*) ta có $2 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Đó là hệ thức phải tìm.

Thí dụ 13

Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác, M và N là các điểm được xác định bởi : $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (1)

a) Chứng minh G, M, N thẳng hàng.

b) Tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$.

c) Tính tỉ số diện tích mà đường thẳng MN vạch ra trên tam giác ACN.

Lời giải

a) *(Cả hai đẳng thức có mặt trong giả thiết đều có thể đóng vai trò là đẳng thức chủ. Ta chọn một trong hai đẳng thức ấy, chẳng hạn chọn $3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ làm đẳng thức chủ, thiết lập đẳng thức gánh cho G và N)*

Ta có $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{GN}-\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$ (2)

- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$ (3)

Thay (3) vào (2) có : $2\overrightarrow{GN}=-3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=-3\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB}$ (4)

Cộng theo từng vế các đẳng thức (1) và (4) ta có

$$2\overrightarrow{GN}=(-3\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB})+(3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB})$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=3(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{GA})+4(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{GB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=3\overrightarrow{GM}+4\overrightarrow{GM}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN}=7\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow$ G, M, N thẳng hàng (đpcm). (h7).

b) Gọi I là trung điểm BC. Từ giả thiết ta có :

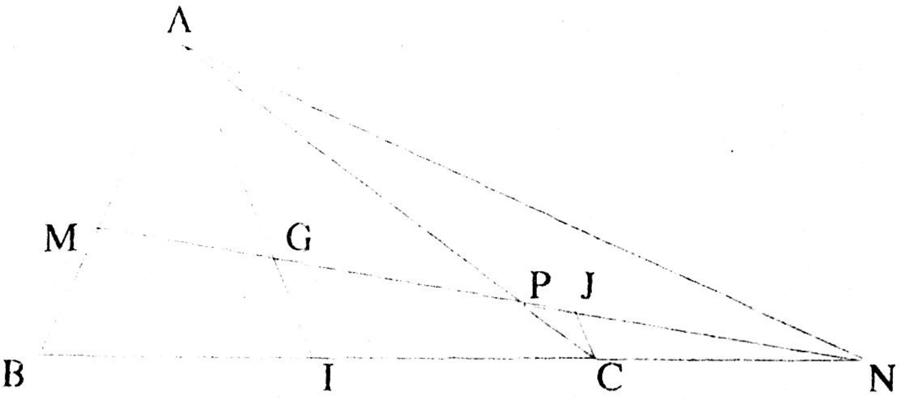
- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$
- $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow$ C là trung điểm đoạn thẳng IN

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

c) Gọi P là giao điểm của AC và đường thẳng MN.

Gọi diện tích tam giác NPA là S_1, diện tích tam giác NPC là S_2. Rõ ràng $\frac{S_1}{S_2}=\frac{PA}{PC}$ (1)

Bài toán dẫn tới tính tỉ số $\frac{PA}{PC}$.



Hình 7

Cách 1: Từ C kẻ đường thẳng song song với AI cắt đường thẳng MN tại J.

Ta có $\frac{PA}{PC}=\frac{AG}{CJ}=\frac{2GI}{CJ}$. (2)

Lại có C là trung điểm đoạn thẳng IN $\Rightarrow$ GI = 2CJ nên thay vào (2) ta có

$$\frac{PA}{PC}=\frac{2.2CJ}{CJ} \Leftrightarrow \frac{PA}{PC}=4.$$ Vậy $\frac{S_1}{S_2}=4$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1530

Cách 2: Áp dụng kết quả thí dụ 8 vào tam giác ABC ta có:

$$\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{AB}\Rightarrow p=\frac{4}{7},\ \overrightarrow{AG}=q.\overrightarrow{AI}\Rightarrow q=\frac{2}{3},\ \overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AC}$$

Do vậy $\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\Leftrightarrow 3=\frac{7}{4}+\frac{1}{r}\Leftrightarrow r=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{AP}{AC}=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow\frac{AP}{AC-AP}=\frac{4}{5-4}\Leftrightarrow\frac{PA}{PC}=4$. Vậy $\frac{S_1}{S_2}=4$

Cách 3 : Áp dụng kết quả thí dụ 8 vào tam giác AIN ta có :

Do vậy $\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\Leftrightarrow\frac{2}{q}=\frac{3}{2}+1\Leftrightarrow\frac{2}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow q=\frac{4}{5}$ hay

$\overrightarrow{AG}=p\overrightarrow{AI}\Rightarrow p=\frac{2}{3}$, $\overrightarrow{AP}=q.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AN}=r\overrightarrow{AN}\Rightarrow r=1$.

$\frac{AP}{AC}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow\frac{AP}{AC-AP}=\frac{4}{5-4}\Leftrightarrow\frac{PA}{PC}=4\Leftrightarrow\frac{S_1}{S_2}=4.$

Thí dụ 14

Cho tam giác ABC. Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác. Gọi I là tâm đường tròn đi qua các trung điểm của ba cạnh. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

b) $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OI}$

Lời giải

a) Theo kết quả thí dụ 3:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, cho M ≡ O ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.(đpcm) (1)

Việc chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ có thể làm theo các cách sau :

Cách 1:

Áp dụng kết quả bài tập 8 vào tam giác AHA', trung tuyến AK, ta có

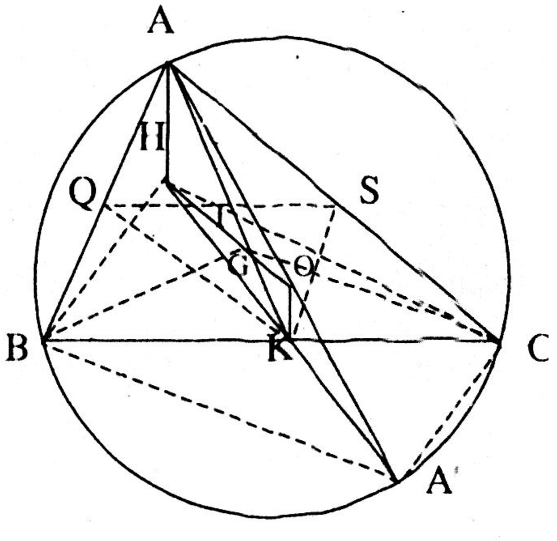
$\overrightarrow{AH}=p\overrightarrow{AH}\Rightarrow p=1$, $\overrightarrow{AG}=q\overrightarrow{AK}\Rightarrow q=\frac{2}{3}$,

Do vậy $\frac{2}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\Leftrightarrow 3=1+2$ đúng.

Vậy H, G, O thẳng hàng.

Lại có AH//OK (do cùng vuông góc với BC) nên $\frac{HG}{GO}=\frac{AG}{GK}=2\Leftrightarrow HG=2HO$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ (đpcm). (h8).



Hình 8

Cách 2:

Ta có AH//OK (do cùng vuông góc với BC) nên OK là đường trung bình của tam giác AHA' $\Rightarrow\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{OK}$.

Theo quy tắc trung điểm ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{HA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OH}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (dpcm) (3)

c) Gọi Q, S theo thứ tự là trung điểm AB, AC $\Rightarrow$ QS//BC.

Để ý OK ⊥ BC $\Leftrightarrow$ OK ⊥ QS hay OK là đường cao của tam giác QSK. Tương tự OQ cũng là đường cao của tam giác QSK suy ra O là trực tâm ΔQSK.

Cũng dễ thấy AK chứa một trung tuyến của ΔQSK từ đó suy ra G cũng là trọng tâm ΔQSK. Theo kết quả câu c) trong tam giác QSK ta có $\overrightarrow{IO} = 3\overrightarrow{IG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IO} = 3(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OG}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IO} = 3\overrightarrow{GO}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{HO}$ (dpcm)

Chú ý

Từ các kết quả của bài toán ta có bốn điểm O, H, G, I thẳng hàng.

" Trong mọi tam giác : Trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp luôn thẳng hàng".

Chân lí ấy đã ghi thành lịch sử : Đường thẳng xuyên qua trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác được gọi là *"đường thẳng Ơle"*.

Thí dụ 15

Cho tam giác ABC và điểm M . Gọi G_a, G_b, G_c, G_m, G theo thứ tự là trọng tâm các tam giác MBC, MCA, MAB, $G_aG_bG_c$ và ABC. Chứng minh khi M thay đổi, đường thẳng MG_m luôn quay quanh một điểm cố định.

Lời giải

Ta có G_b là trọng tâm ΔMAC

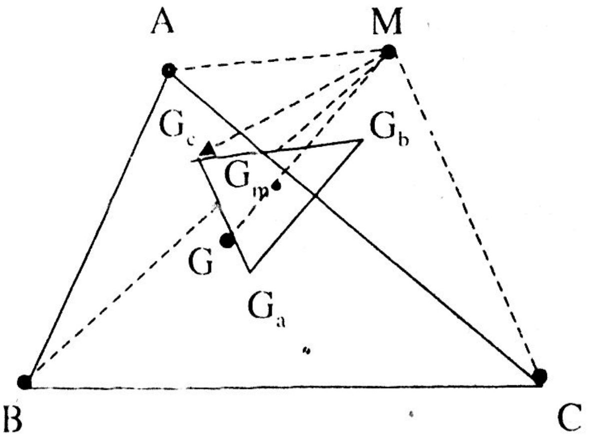
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_b} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})$

Tương tự $\overrightarrow{MG_a} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$,

$\overrightarrow{MG_c} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$

Suy ra $\overrightarrow{MG_a} + \overrightarrow{MG_b} + \overrightarrow{MG_c}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ (1)



Hình 9

Lại có G_m là trọng tâm $\Delta G_aG_bG_c$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG_a} + \overrightarrow{MG_b} + \overrightarrow{MG_c} = 3\overrightarrow{MG_m}$ (2)

G là tọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (3)

Thay (3), (2) vào (1) ta có $3\overrightarrow{MG_m} = 2\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow$ M, G, G_m thẳng hàng hay khi M thay đổi,đường thẳng MG_m đi qua G. (h9)

Thí dụ 16

Cho tam giác ABC và các số thực α, β, γ có α + β + γ ≠ 0.

a) Gọi J là điểm xác định bởi $\begin{cases}\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}\\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0\end{cases}$ (1)

Gọi A', B', C' theo thứ tự lần lượt là chân của đường thẳng AJ, BJ, CJ trên các đường thẳng BC, CA, AC. Chứng minh

$$\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\gamma\overrightarrow{B'C}+\alpha\overrightarrow{B'A}=\alpha\overrightarrow{C'A}+\beta\overrightarrow{C'B}=\vec{0} \qquad (2)$$

b) *Đảo lại* : Nếu A', B', C' là ba điểm thoả mãn (2) với α + β + γ ≠ 0 thì ba đường thẳng AA', BB', CC' :

- hoặc là hoặc đồng quy tại điểm J và $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.
- hoặc là đôi một song song.

Lời giải

a) Gọi J, A', B', C là các điểm được xác định bởi $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

$$\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\gamma\overrightarrow{B'C}+\alpha\overrightarrow{B'A}=\alpha\overrightarrow{C'A}+\beta\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$$

Điều cần chứng minh tương đương với các bộ ba điểm sau đây thẳng hàng : (A, A', J), (B, B', J), (C, C', J)

Thật vậy :

Ta có $\begin{cases}\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}\\ \beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\vec{0}\end{cases}$

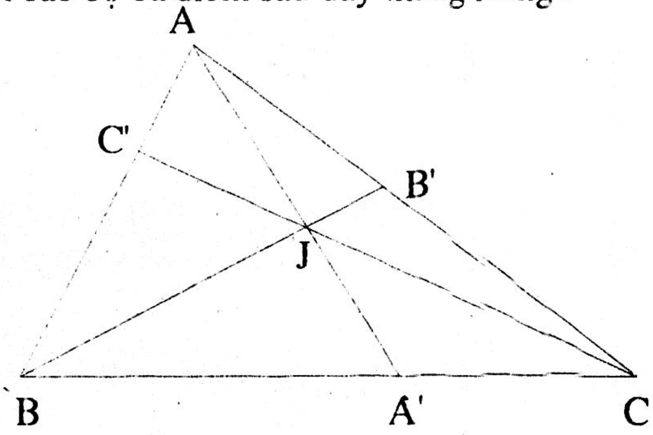
$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\alpha\overrightarrow{AJ}\\ \beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\vec{0}\end{cases}$

Trừ vế theo vế ta có

$\beta(\overrightarrow{JB}-\overrightarrow{A'B})+\gamma(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{A'C})=\alpha\overrightarrow{AJ}$

$\Leftrightarrow \beta\overrightarrow{JA'}+\gamma\overrightarrow{JA'}=\alpha\overrightarrow{AJ}$

$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)\overrightarrow{JA'}=\alpha\overrightarrow{AJ} \Leftrightarrow$ A, A', J thẳng hàng. (h10)



Hình 10.1

Tương tự cho các cặp số còn lại. Bài toán được chứng minh.

b) Đảo lại.

Do α + β + γ ≠ 0 $\Leftrightarrow$ (α + β) + (β + γ) + (γ + α) ≠ 0 suy ra trong ba số (α + β), (β + γ), (γ + α) ắt phải có một số khác không. Chẳng hạn (α + β) ≠ 0.

Xét hai khả năng đối với hai đường thẳng AA' và BB''.

* *Khả năng 1*: AA' cắt BB'.

Gọi J = AA' ∩ BB'. Kẻ đường thẳng CJ cắt đường thẳng AC tại C_1.

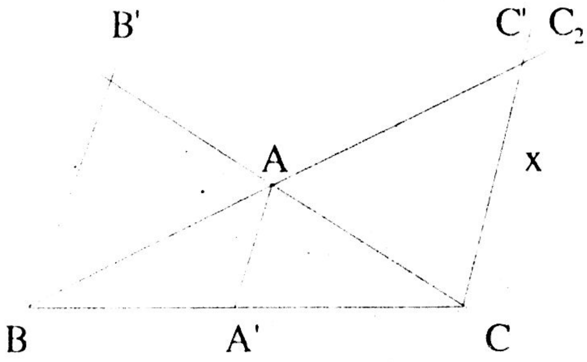
Theo a) ta có $\alpha\overrightarrow{C_1A}+\beta\overrightarrow{C_1B}=\vec{0}$. Trừ vế theo vế với $\alpha\overrightarrow{C'A}+\beta\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$ suy ra

$$\alpha\overrightarrow{C_1C'}+\beta\overrightarrow{C_1C'}=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{C_1C'}=\vec{0} \qquad (3)$$

Do α + β ≠ 0 nên (3) $\Leftrightarrow$ C_1=C' hay ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm J (đpcm).

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Giả sử $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} \neq \vec{0}$ kết hợp với (2) ta có $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} \neq \gamma\overrightarrow{JC} \\ \beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0} \end{cases}$



Hình 10.2

Trừ theo từng vế suy ra $(\beta+\gamma)\overrightarrow{JA'} \neq \alpha\overrightarrow{AJ}$ <=> A, A', J không thẳng hàng. (!) (mâu thuẫn). Vậy $\alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (đpcm)

* *Khả năng 2*: (h10.2)AA'//BB'.

Kẻ đường thẳng Cx//BB' cắt đường thẳng AB tại C_2. Lặp lại lý luận như khả năng 1 ta có $C_2 \equiv C''$ hay CC''//BB'. Vậy ba đường thẳng AA', BB', CC' đôi một song song (đpcm).

Thí dụ 17 (*Các tâm tỉ cự đặc biệt trong tam giác*)

Cho tam giác ABC.

a) Gọi M là điểm tuỳ ý trong tam giác ABC, s_a, s_b, s_c theo thứ tự lần lượt là diện tích các tam giác ΔMBC, ΔMCA, ΔMAB. Chứng minh rằng :

$$s_a\overrightarrow{MA} + s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \qquad (1)$$

b) Tìm bộ số (α, β, γ) tương thích sao cho theo thứ tự trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, tâm đường tròn nội tiếp I là tâm tỉ cự của ba đỉnh A, B, C theo bộ số ấy. (Đối với H ta giả thiết ΔABC không vuông).

Lời giải

a) *Cách 1* (ứng dụng trực tiếp kết quả Thí dụ 11) :

Gọi K, L theo thứ tự là chân của các đoạn thẳng vuông góc hạ từ B, C tới đường thẳng BM. Tam giác ABC không vuông nên B'≠A.

Ta có $$\frac{B'A}{B'C} = \frac{AK}{CL} = \frac{s_c}{s_a} \Rightarrow s_a\overrightarrow{B'A} + s_c\overrightarrow{B'C} = \vec{0} \quad . \qquad (*)$$

Tương tự ta có $s_c\overrightarrow{A'C} + s_b\overrightarrow{A'B} = \vec{0}$, $s_a\overrightarrow{C'A} + s_b\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$.

Xem $\alpha = s_a$, $\beta = s_b$, $\gamma = s_c$ ta có $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \gamma\overrightarrow{B'C} + \alpha\overrightarrow{B'A} = \alpha\overrightarrow{C'A} + \beta\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$

Theo kết quả câu b) ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ hay

$$s_a\overrightarrow{MA} + s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.\text{(đpcm)}$$

Cách 2 : (Chứng minh trực tiếp) (h11.1)

Vẽ hình bình hành MA_1CB_1 trong đó $A_1 \in AA'$, $B_1 \in BB'$. Gọi K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, C trên đường thẳng BM.

Ta có $$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} \qquad (1)$$

Để ý $$\frac{MA_1}{MA} = \frac{CB_1}{MA} = \frac{AK}{CL} = \frac{s_c}{s_a} \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} = -\frac{s_c}{s_a}\overrightarrow{MA}. \qquad (2)$$

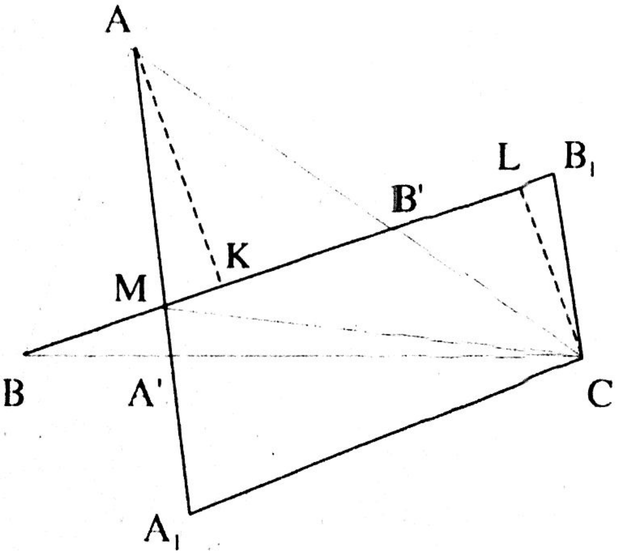
Tương tự $\overrightarrow{MB_1} = -\frac{s_b}{s_a}\overrightarrow{MB}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) có

$$\overrightarrow{MC} = -\frac{s_c}{s_a}\overrightarrow{MA} - \frac{s_b}{s_a}\overrightarrow{MB} \qquad (4)$$

$\Leftrightarrow s_a\overrightarrow{MA} + s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (dpcm)

b) *Bằng cách tương tự như hai cách đã trình bày ở trên, bạn dễ dàng tìm bộ số (α, β, γ) tương thích để điểm M là tâm tỉ cự của A, B, C trong các trường hợp sau : M≡H, M≡I, M≡O (H, I theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)*



Hình 11.1

1) Khi M≡H (trực tâm ΔABC) (h11.2)

Cách 1 (ứng dụng trực tiếp kết quả Thí dụ 11) :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AA'\text{cotg}B}{AA'\text{cotg}C} = \frac{\text{tg}C}{\text{tg}B} \Rightarrow \text{tg}B.\overrightarrow{A'B} + \text{tg}C.\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$$

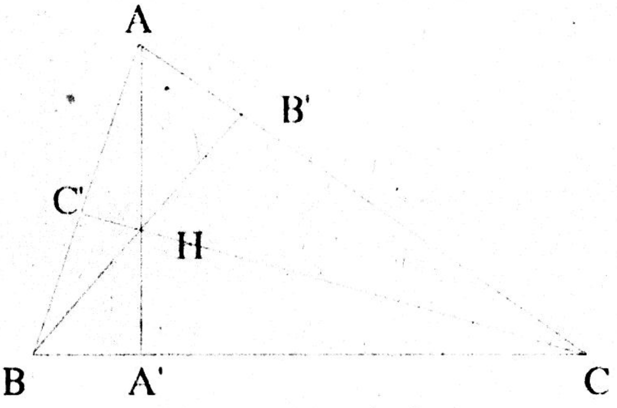
Tương tự ta có $\text{tg}C.\overrightarrow{B'C} + \text{tg}A.\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, $\text{tg}A.\overrightarrow{c'A} + \text{stg}B.\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$

Xem α = tgA, β = tgB, γ = tgC ta có

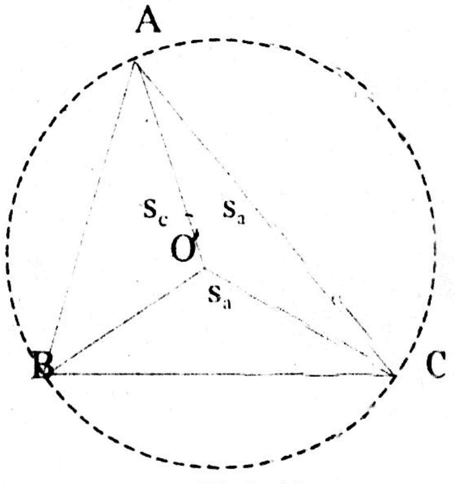
$$\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \gamma\overrightarrow{B'C} + \alpha\overrightarrow{B'A} = \alpha\overrightarrow{C'A} + \beta\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$$

Theo kết quả câu b) ta có $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} + \gamma\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

hay $\overrightarrow{HA}.\text{tg}A + \overrightarrow{HB}.\text{tg}B + \overrightarrow{HC}.\text{tg}C = \vec{0}$



Hình 11.2



Hình 11.3

Cách 2 (sử dụng kết quả câu a) :

Bạn dễ dàng thấy $\frac{s_c}{s_a} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{\text{tg}C}{\text{tg}A}$, tương tự $\frac{s_b}{s_a} = \frac{\text{tg}B}{\text{tg}A}$ thay vào (4) có điều phải chứng minh.

2) Khi M≡O (tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC) (H11.3)

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có

$s_a = 2OB.OC.\sin\widehat{BAC} = 2R\sin 2A$, tương tự ta có $s_b = 2R\sin 2B$, $s_c = 2R\sin 2C$, do vậy (4) <> $\overrightarrow{OA}\sin 2A + \overrightarrow{MB}\sin 2B + \overrightarrow{MC}\sin 2C = \vec{0}$.

3) Khi M≡I (tâm đường tròn nội tiếp ΔABC)

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

Ta có $s_a = \frac{1}{2}ar$, $s_b = \frac{1}{2}br$, $s_c = \frac{1}{2}cr$, do vậy : (4) ⇔ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (5)

Chú ý

- Kết quả (5) cũng có thể tìm được như sau

Khi M≡I ta có $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ => $b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, tương tự ta có $c\overrightarrow{B'C} + a\overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, $a\overrightarrow{C'A} + b\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$

Xem α=a, β=b, γ= c ta có $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \gamma\overrightarrow{B'C} + \alpha\overrightarrow{B'A} = \alpha\overrightarrow{C'A} + \beta\overrightarrow{C'B} = \vec{0}$

Theo kết quả câu b) ta có $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ hay $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

- Khi M≡G (trọng tâm ΔABC) ta có $s_a = s_b = s_c$ và (1) <> $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
(Các bạn thấy lại kết quả quen thuộc)

- Khi ΔABC đều có cạnh bằng a, gọi khoảng d_a, d_d, d_c lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC, CD ta có $s_a = \frac{1}{2}ad_a$, $s_b = \frac{1}{2}ad_b$, $s_c = \frac{1}{2}ad_c$, suy ra (1) ⇔ $d_a\overrightarrow{MA} + d_b\overrightarrow{MB} + d_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- Nếu M nằm ngoài tam giác ABC, chẳng hạn M thuộc miền góc ∠ABC, chứng minh tương tự ta có $s_a\overrightarrow{MA} - s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Bài toán 4

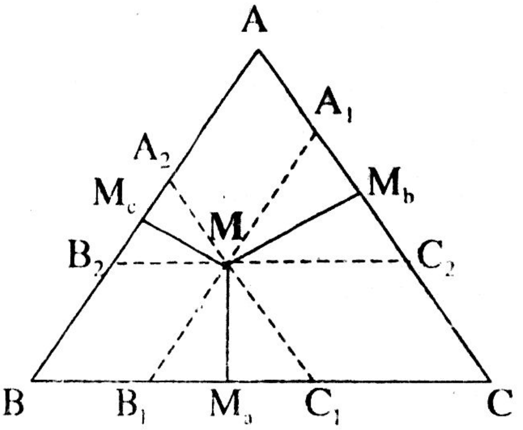
Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định

Thí dụ 18

Cho tam giác đều ABC và điểm M không nằm ngoài tam giác ấy. Gọi M_a, M_b, M_c theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi $\overrightarrow{Mx} = \overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c}$. Chứng minh khi M thay đổi, đường thẳng Mx luôn quay quanh một điểm cố định.

LỜI GIẢI

Cách 1: (h14). Qua M kẻ các đường thẳng A_1B_1//AB, A_2C_1//AC, B_2C_2//BC suy ra các tam giác MA_2B_2, MB_1C_2, MA_1C_2 là những tam giác đều và theo thứ tự MM_c MM_b, MM_a là các đường trung tuyến của tam giác đó. Đồng thời MA_1AA_2, MB_1BB_2, MC_1CC_2 là các hình bình hành.



Hình 14

Do vậy $\overrightarrow{MM_a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$,

$$\overrightarrow{MM_b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}),$$

$\overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2})$. Suy ra :

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}) + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2})]$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ hay $\overrightarrow{Mx} = 3\overrightarrow{MG}$

Hay khi M thay đổi, đường thẳng Mx luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Cách 2 : Gọi A', B', C' theo thứ tự lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C và S là diện tích tam giác ABC.

Ta có $\frac{MM_a}{AA'} = \frac{s_a}{S} \Rightarrow \overrightarrow{MM_a} = \frac{s_a}{S}\overrightarrow{AA'} = \frac{3s_a}{2S}\overrightarrow{AG} = \frac{3s_a}{2S}(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA})$

Tóm lại $\overrightarrow{MM_a} = \frac{3s_a}{2S}(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA})$.

Tương tự $\overrightarrow{MM_b} = \frac{3s_b}{2S}(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB})$, $\overrightarrow{MM_c} = \frac{3s_c}{2S}(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC})$

Do vậy $\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{3s_a}{2S}[(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC})]$

$$= \frac{3(s_a + s_b + s_c)}{S}\overrightarrow{MG} - \frac{3}{S}(s_a\overrightarrow{MA} + s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC}) \qquad (1)$$

Rõ ràng $s_a + s_b + s_c = S$ và theo thí dụ trên $s_a\overrightarrow{MA} + s_b\overrightarrow{MB} + s_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, thay vào (1) ta có $\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = 3\overrightarrow{MG}$ hay $\overrightarrow{Mx} = 3\overrightarrow{MG}$

Hay khi M thay đổi, đường thẳng Mx luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC.

Thí dụ 19

Cho góc xOy, trên Ox lấy các điểm A, B, C sao cho OA : AB : BC = 1 : 2 : 3; trên Oy lấy các điểm A', B', C' sao cho OA' : A'B' : B'C' = 3 : 3 : 2. Chứng minh ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{OA}{AB} = \frac{1}{2} \neq 1 = \frac{OA'}{A'B'}$ nên hai đường thẳng AA', và BB' cắt nhau. Gọi giao điểm của chúng là I, rõ ràng I, A, A' thẳng hàng và I, B, B' thẳng hàng. Bởi vậy ắt tồn tại các số α, β sao cho (*)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OA'} \\ \overrightarrow{OI} = \beta\overrightarrow{OB} + (1-\beta)\overrightarrow{OB'} \end{cases}$$

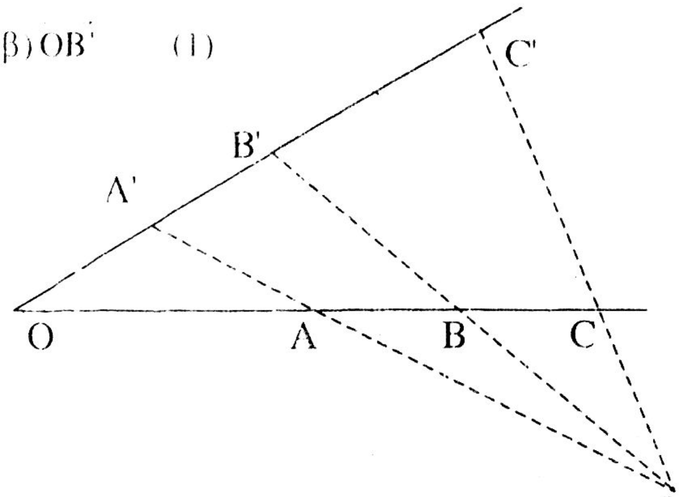
$$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OA'}=\beta\overrightarrow{OB}+(1-\beta)\overrightarrow{OB'} \qquad (1)$$

Theo giả thiết ta có

$$\frac{OA}{1}=\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}$$

$$=\frac{OA+AB+BC}{1+2+3}=\frac{OC}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{OB}=3\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{cases} \qquad (2)$$



Hình 15

$$\frac{OA'}{3}=\frac{A'B'}{3}=\frac{B'C'}{2}=\frac{OA'+A'B'+B'C'}{3+3+2}=\frac{OC'}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OA'}=\frac{3\overrightarrow{OC'}}{8}\\ \overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OA'}=\frac{3\overrightarrow{OC'}}{4}\end{cases} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta có $\frac{\alpha\overrightarrow{OC}}{6}+\frac{3(1-\alpha)\overrightarrow{OC'}}{8}=\frac{\beta\overrightarrow{OC}}{2}+\frac{3(1-\beta)\overrightarrow{OC'}}{4}$ (4)

Do $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OC'}$ không cùng phương nên

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{6}=\frac{\beta}{2}\\ \frac{3(1-\alpha)}{8}=\frac{3(1-\beta)}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=-1\end{cases} \qquad (5)$$

Thay (5), (3), (2) vào (*) ta có $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OC'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC'}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC'}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{C'I}=\overrightarrow{C'C} \Leftrightarrow$ C', C, I thẳng hàng. (đpcm)

Bài toán 5

Tập hợp điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ hoặc độ dài vectơ

Để tìm tập hợp điểm M thoả mãn một đẳng thức vectơ hoặc độ dài vectơ ta biến đổi các biểu thức vectơ thành các *biểu thức rút gọn* của nó. Trong phần này xét các bài toán mà kết quả của sự biến đổi là các đẳng thức vectơ có một trong các dạng sau :

1) $\overrightarrow{MJ}=x\vec{a}$, trong đó J là một điểm cố định tìm được (thường là tâm tỉ cự của hệ điểm dính với M), $\vec{a}$ là một véc tơ không đổi. Khi đó tập hợp điểm M là một đường thẳng qua J cùng phương với vectơ $\vec{a}$

2) $|\overrightarrow{MJ}|=|\vec{a}|$, trong đó J là một điểm cố định tìm được (thường là tâm tỉ cự của hệ điểm dính với M), $\vec{a}$ là một véc tơ không đổi. Khi đó tập hợp điểm M là một đường tròn tâm J, bán kính bằng $|\vec{a}|$.

3) $|\overrightarrow{MJ}|=|\overrightarrow{MI}|$ trong đó I, J là hai điểm cố định tìm được (I, J tâm tỉ cự của hệ điểm dính với M). Khi đó tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IJ.

Thí dụ 20

Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M trong mỗi trường hợp sau.

a) $|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$

b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

c) $|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}|$

Lời giải

a) Gọi I là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (3, 1, – 2) tức là

$$3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0} <> 3\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AC} <> 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CE}$$

(trong đó E là trung điểm AB). Suy ra I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACEI.
Theo hệ thức rút gọn ta có

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=(3+1-2)\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MI}$ (1)

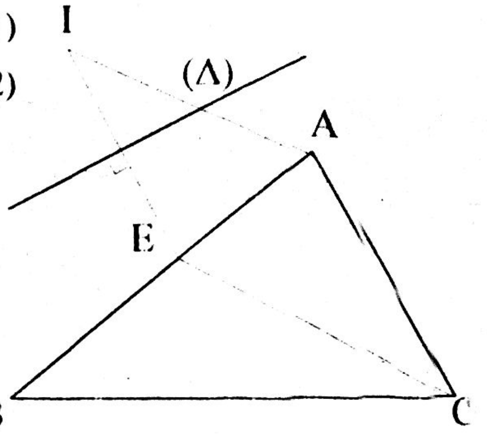
Lại có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$

$<> 2\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{ME} <> MI=ME$

<> Tập hợp M là đường thẳng (Δ) -*trung trực* của đoạn thẳng IE (h16)



Hình 16

b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Gọi Q, P theo thứ tự lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CQ

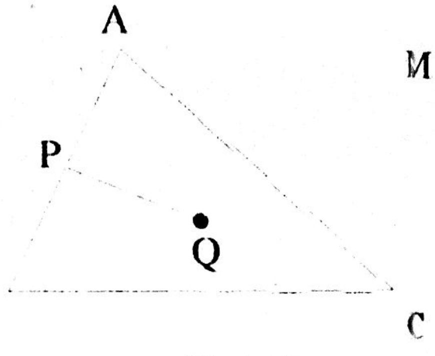
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|$

$=2|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MC}|+2|\overrightarrow{MQ}|$

$=4MP+2MQ=2MP+2(MP+MQ)$

Với mọi điểm M ta có MP+MQ >PQ dấu đẳng thức có khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng PQ, MP ≥ 0 dấu đẳng thức có khi M và chỉ khi M≡P.

Suy ra $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|>2PQ$, dấu đẳng thức có khi M và chỉ khi M≡P hay $\min(|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|)=PQ$.



Hình 17

Do vậy tập hợp điểm M cần tìm là điểm P. (h17)

c) Gọi J là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (3, –2, 1) tức l

$$3\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0} <> \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}+2(\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB})=\vec{0} \qquad (1)$$

Gọi D là trung điểm đoạn thẳng AC, ta có

(1) <=> $2\vec{JD} + 2\vec{BA} = \vec{0}$ <=> $\vec{DJ} = \vec{BA}$

<=> J là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABDJ.

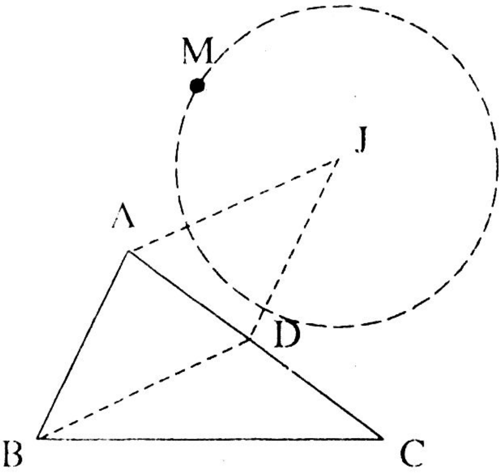
Theo hệ thức rút gọn ta có

$3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = (3 - 2 + 1)\vec{MJ} = 2\vec{MJ}$

Do vậy $|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MC}|$

<=> $2|\vec{MJ}| = |\vec{CA}|$ <=> $IM = \dfrac{AC}{2}$

<=> Tập hợp M là đường tròn tâm J, bán kính bằng $\dfrac{AC}{2}$. (h18).



Hình 18

Thí dụ 21

Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M trong mỗi trường hợp sau.

a) $2|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MA} + \vec{MB}|$

b) $3x\vec{MA} + (2x + 1)\vec{MB} + (x - 1)\vec{MC} = \vec{0}$, với mọi $x \in R$.

c) $|3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MC}|$

Lời giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, I là trung điểm AB ta có

$2|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3|\vec{MA} + \vec{MB}|$ <=> $2|3\vec{MG}| = 3|2\vec{MI}|$ <=> $MG = MI$

<=> tập hợp các điểm M là đường trung trực của IG.

b) Ta có $3x\vec{MA} + (2x + 1)\vec{MB} + (x - 1)\vec{MC} = \vec{0}$

<=> $x(3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{MC} - \vec{MB}$ <=> $x(3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC}) = \vec{BC}$ (1)

Gọi J là tâm tỉ cự của ba điểm A, B, C theo bộ số (3, 2, 1). Theo *hệ thức rút gọn* ta có $3\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MC} = (3 + 2 + 1)\vec{MJ} = 4\vec{MJ}$, $\vec{MC} - \vec{MB} = \vec{BC}$

Do vậy (1) <=> $4x\vec{MJ} = \vec{BC}$. (2)

Rõ ràng J cố định, $\vec{BC}$ không đổi, hệ thức (2) chứng tỏ $\vec{MJ}$ luôn cùng phương với vectơ $\vec{BC}$ nên tập hợp M là đường thẳng qua J có phương là vectơ $\vec{BC}$.

c) Gọi J là tâm tỉ cự của ba điểm ABC theo bộ số (3,1,1) tức là $3\vec{JA} + \vec{JB} + \vec{JC} = \vec{0}$

<=> $3\vec{JA} + (\vec{JA} + \vec{AB}) + (\vec{JA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

<=> $5\vec{JA} + (\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{0}$ (1)

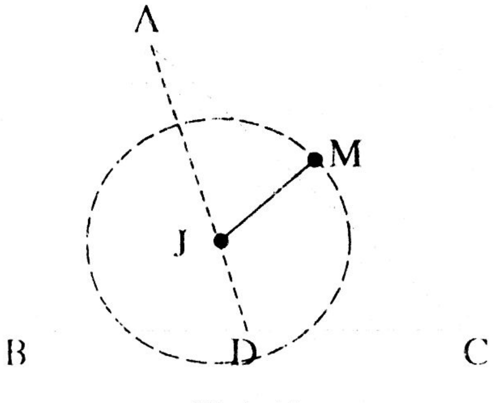
Gọi D là trung điểm BC ta có

(1) <=> $5\vec{JA} + 2\vec{AD} = \vec{0}$ <=> $\vec{AJ} = \dfrac{2}{5}\vec{AD}$

Theo *hệ thức rút gọn* ta có

$3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = (3 + 1 + 1)\vec{MJ} = 4\vec{MJ}$

suy ra (1) <=> $|4\vec{MJ}| = |\vec{CA}|$



Hình 19

$\Leftrightarrow$ $4JM = AC \Leftrightarrow JM = \dfrac{AC}{2}$. Rõ ràng điểm J cố định, AC không đổi nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm J bán kính bằng $\dfrac{AC}{2}$. (h19)

Thí dụ 22. Cho tam giác ABC và đường thẳng (Δ). Gọi S là diện tích tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $M\subset(\Delta)$ và $|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

b) $|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|\,BC = 6S$.

b) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

Lời giải

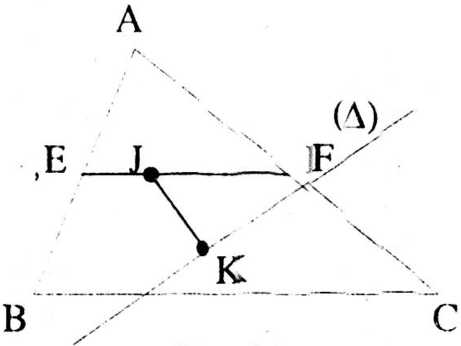
a) (h20). Gọi J là tâm tỉ cự của ba điểm ABC theo bộ số (3, 2, 1) tức là $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB})+(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC})=\vec{0}$ (1)

Gọi E, F theo thứ tự lần lượt là trung điểm của AB, AC. Ta có (1) $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{JE}+2\overrightarrow{JF}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{JF}=\vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{JE}-\overrightarrow{JF})+3\overrightarrow{JF}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FE}$.



Hình 20

Theo hệ thức rút gọn ta có $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(3+2+1)\overrightarrow{MJ}=6\overrightarrow{MJ}$

$\Rightarrow |3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=6|\overrightarrow{MJ}|$. Gọi K chân đường vuông góc hạ từ J tới đường thẳng (Δ). Rõ ràng $|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 12|\overrightarrow{MJ}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M\equiv K$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là điểm K.

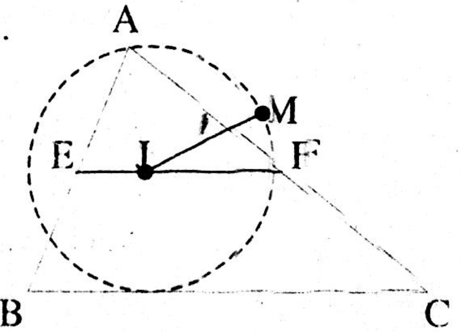
b) Gọi h_a là độ dài đường cao kẻ từ B của ΔABC.

Từ kết quả câu a) suy ra

$$|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}||\overrightarrow{BC}|=6S$$

$\Leftrightarrow 6|\overrightarrow{MJ}||\overrightarrow{BC}|=3|\overrightarrow{BC}|.h_a \Leftrightarrow |\overrightarrow{MJ}|=\dfrac{h_b}{2}$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp M là đường tròn tâm J bán kính bằng $\dfrac{h_b}{2}$ (h21)



Hình 21

c) Gọi E, F, P, Q theo thứ tự là trung điểm lần lượt của AB, AC, BE, CF. (h22)

Ta có

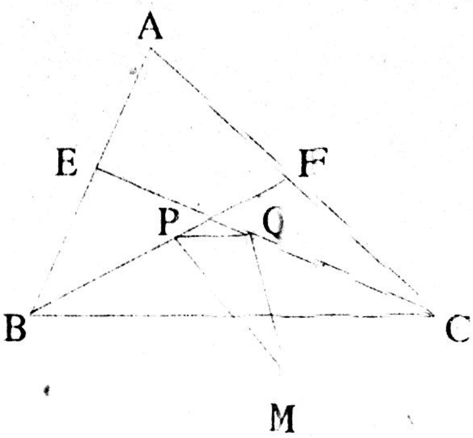
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC})=4\overrightarrow{MQ}$

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MF})=4\overrightarrow{MP}$

Do vậy

$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}|+|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$

$=4(|\overrightarrow{MP}|+|\overrightarrow{MQ}|)\geq 4|\overrightarrow{PQ}|$



Hình 22

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng PQ. Từ đó suy ra tập hợp điểm M phải tìm là đoạn thẳng PQ.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC. Dựng điểm J trong mỗi trường hợp sau:

a) $2\overrightarrow{JC}-3\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{BC}$ b) $2\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ c) $2\overrightarrow{JA}-3\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng :

a) Tồn tại duy nhất một điểm G trên mặt phẳng sao cho

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

(Điểm G ấy được gọi là trọng tâm tứ giác ABCD.)

b) Với mọi điểm M luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm và J tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (7; −1; −1).

a) Chứng minh $\overrightarrow{GJ}=2\overrightarrow{AB}$

b) Gọi I là giao điểm của AJ và BG. Tính $\dfrac{JA}{JI}$?

Bài 4. Cho tứ giác ABCD và M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Có hay không điểm I và số thực x sao cho mỗi đẳng thức sau đây luôn đúng :

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=x.\overrightarrow{MI}$ b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=x.\overrightarrow{MI}$

c) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MD}=x.\overrightarrow{MI}$

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, M là điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}$, N là điểm thuộc đoạn thẳng CD sao cho $\dfrac{CN}{CD}=\dfrac{1}{2}$.

a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BMN. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

c) Gọi J là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BJ}=x.\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Tính $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Tìm x để A, G, J thẳng hàng.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi P, Q là các điểm xác định bởi : $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}=(x+1)\overrightarrow{AQ}$ với $-1\neq x\neq 0$. Chứng minh khi x thay đổi, đường thẳng PQ luôn quay quanh một điểm cố định.

Bài 7. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Bài 8. Cho tam giác đều ABC và điểm M không nằm ngoài tam giác ấy. Gọi M_a, M_b, M_c theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ M đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của M theo thứ tự qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có trọng tâm trùng nhau.

Bài 9. Cho lục giác đều ABCDEF. Chứng minh

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CD}$$

Bài 10. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ AB = a, đáy lớn CD = b. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng qua O, song song với đáy của hình thang cắt AD tại M, cắt BC tại N. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MN} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}$$

Bài 11. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G, M là một điểm tuỳ ý trên BC. Gọi P, Q là chân các đoạn thẳng vuông góc hạ từ M tới AB, AC. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng PQ. Chứng minh khi M thay đổi luôn có $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$.

Bài 12. Cho tứ giác lồi ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, CA lấy các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 sao cho $\frac{A_1A}{A_1B} = \frac{B_1B}{B_1C} = \frac{C_1C}{C_1D} = \frac{D_1D}{D_1A} = x$ (với x>0)

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M luôn có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1}$$

b) Tìm số x > 0 sao cho $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành.

Bài 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Ba đường phân giác trong của các góc A, B, C kéo dài lần lượt cắt đường tròn (O) tại A_1, B_1, C_1. Đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_2, B_2, C_2.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$

b) Chứng minh đường thẳng OI chính là đường thẳng Ơle của tam giác $A_2B_2C_2$.

HƯỚNG DẪN - VẮN TẮT GIẢI

Bài 1. a) J≡C.

b) Gọi D là trung điểm BC => J là trung điểm AD.

c) Không tồn tại điểm J.

Bài 2 b) Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MG}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ (đpcm)

Bài 5. a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$

A, G, J thẳng hàng <=> $\exists y \in R$ sao cho $\overrightarrow{AJ} = y\overrightarrow{AG}$

$$\Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{AB} + x = \frac{5y}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = \frac{5y}{18} \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{14}$$

Bài 7. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm ΔABC, ΔA'B'C'

Ta có $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}$

Tương tự $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'}$

$\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = 3\overrightarrow{G'G} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ (do $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$)

Suy ra $G \equiv G' \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ (đpcm)

Bài 8 Gọi G là trọng tâm ΔABC. Từ kết quả Thí dụ 17§2 suy ra

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

$\Rightarrow (\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB_1} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC_1} - \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ Hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

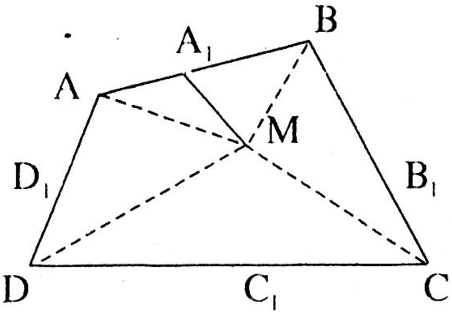
Bài 10. $\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{DC}$ (đpcm)

Bài 11. Là một trường hợp của Thí dụ 17§2 khi $M \in BC$.

Bài 12. a) Ta có $\frac{A_1A}{A_1B} = \frac{B_1B}{B_1C} = \frac{C_1C}{C_1D} = \frac{D_1D}{D_1A} = x$, suy ra

$$\text{Cộng:}\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{MA} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MB_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{MB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{MC} \\ \overrightarrow{MC_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{MC} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{MD} \\ \overrightarrow{MD_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{MD} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{MA} \end{cases}$$



Hình 23

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ (đpcm). (h23).

b) Từ $\frac{A_1A}{A_1B} = \frac{B_1B}{B_1C} = \frac{C_1C}{C_1D} = \frac{D_1D}{D_1A} = x$ suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1B} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB_1} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{D_1D} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{DC_1} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{D_1C_1} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{DA} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{CD}$$

Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{x+1}\overrightarrow{DA} + \frac{x}{x+1}\overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \frac{x}{x+1}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + x(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + (x-1)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) = \vec{0} \quad (\text{do } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{array}\right.$$

Trường hợp 1 :

$\Leftrightarrow$ Tứ gác ABCD là hình bình hành. Khi đó tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành với mọi x>0.

Trường hợp 2 : $x = 1 \Leftrightarrow A_1, B_1, C_1, D_1$ là trung điểm AB, BC, CD, DA $\Leftrightarrow$ Tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành không phụ thuộc vào hình dạng tứ giác ABCD.

§2. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ

I. Các kiến thức cơ bản

1) Định nghĩa

- Nửa đường tròn đơn vị

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy về phía tung độ dương, ta vẽ đường tròn tâm O, bán kính R=1, đường kính thuộc trục x'Ox. Nửa đường tròn ấy được gọi là *nửa đường tròn đơn vị.*

- Với mỗi góc α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$), xác định một điểm M sao cho $\angle MOx = \alpha$.

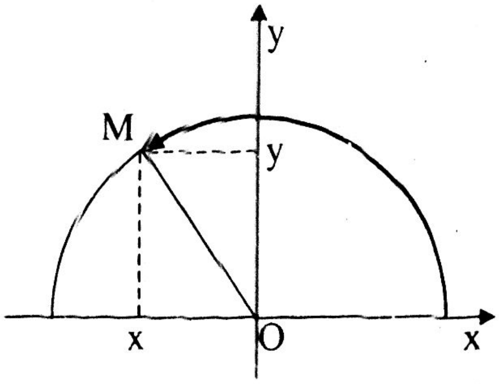
Giả sử M có toạ độ (x; y). Khi đó

$\sin\alpha = y$;

$\cos\alpha = x$;

$\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$),

$\text{cotg}\alpha = \frac{x}{y}$ ($y \neq 0$)



Hình 24

2) Các hệ thức cơ bản

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

c) $\text{tg}\alpha\text{cotg}\alpha = 1$

d) $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \text{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

3) Dấu các tỉ số lượng giác

Độ lớn HSLG	$0^0<\alpha<90^0$	$90^0<\alpha<180^0$
$\cos\alpha$	+	-
$\sin\alpha$	+	+
tangα	+	-
cotgα	+	-

4) Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotg	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	||

5) Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau và bù nhau

$$\begin{cases} \sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha \\ \cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha \\ tg(90^0-\alpha)=cotg\alpha \\ cotg(90^0-\alpha)=tg\alpha \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha \\ \cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha \\ tg(180^0-\alpha)=-tg\alpha \\ cotg(180^0-\alpha)=-cotg\alpha \end{cases}$$

Thí dụ 1.

Chứng minh các hằng đẳng thức

a) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (*)

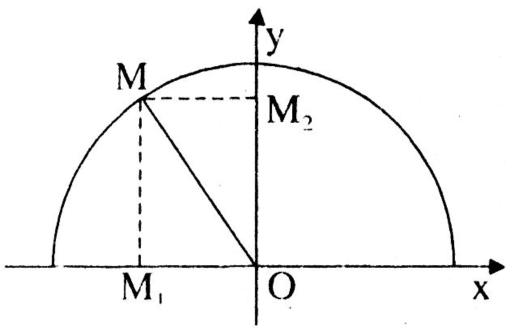
b) $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (với $\cos x\neq 0$), $1+cotg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ (với $\sin x\neq 0$).

Lời giải

a) Giả sử M là một điểm nằm trên đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx}=\alpha$.

Trường hợp 1: M thuộc giao của nửa đường tròn đơn vị với các trục toạ độ thì công thức hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2: M không thuộc giao của nửa đường tròn đơn vị với các trục toạ độ. Gọi hình chiếu của M theo thứ tự trên trục Ox, Oy lần lượt là M_1, M_2



Hình 25

Ta có $\sin\alpha = OM_2 = OM$. $\cos\alpha = OM_1 \Rightarrow |\cos\alpha| = OM_1 = MM_2$.

Bởi thế nên $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = OM_2^2 + MM_2^2 = OM^2 = 1$ (định lí Pitago)

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (đpcm)

b) Nếu $\cos\alpha \neq 0$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ (đpcm)}$$

Nếu $\sin\alpha \neq 0$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 1+cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ (đpcm).}$$

Thí dụ 2.

Cho tam giác ABC. Hãy chỉ ra các số bằng nhau trong các số sau đây :

$-\cos A, -\cot gA, -tgA, \cos\frac{A}{2}, \sin\frac{A}{2}, \cot g\frac{A}{2}, tg\frac{A}{2}, \cos A, \sin A, \sin\frac{B+C}{2},$

$\cos\frac{B+C}{2}, tg\frac{B+C}{2}, \cot g\frac{B+C}{2}, \sin(B+C), \cos(B+C), tg(B+C), cotg(B+C).$

Lời giải

Trong tam giác ABC luôn có $(B+C) = (180^0 - A)$ nên :

$$\begin{cases} \sin(B+C) = \sin(180^0 - A) = \cos A \\ \cos(B+C) = \cos(180^0 - A) = -\cos A \\ tg(B+C) = tg(180^0 - A) = -tgA \\ cotg(B+C) = cotg(180^0 - A) = -\cot gA \end{cases} \quad \text{Tóm lại : } \begin{cases} \sin(B+C) = \cos A \\ \cos(B+C) = -\cos A \\ tg(B+C) = -tgA \\ cotg(B+C) = -\cot gA \end{cases}$$

Trong tam giác ABC luôn có $\frac{B+C}{2} = \left(90^0 - \frac{A}{2}\right)$ nên :

$$\begin{cases} \sin\frac{B+C}{2} = \cos\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \\ \cos\frac{B+C}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2} \\ tg\frac{B+C}{2} = cotg\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = \cot g\frac{A}{2} \\ \cot g\frac{B+C}{2} = tg\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) = tg\frac{A}{2} \end{cases} \quad \text{Tóm lại : } \begin{cases} \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2} \\ \cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2} \\ tg\frac{B+C}{2} = \cot g\frac{A}{2} \\ \cot g\frac{B+C}{2} = tg\frac{A}{2} \end{cases}$$

Thí dụ 3

Tính giá trị biểu thức

1) $P = tg1^0.tg2^0.tg3^0 \ldots tg87^0.tg88^0.tg89^0$.

2) $Q = \cos10^0+\cos30^0+\cos50^0+\ldots+\cos130^0+\cos150^0+\cos170^0$.

3) $R = \cos1^0.\cos2^0.\cos3^0 \ldots \cos177^0.\cos178^0.\cos179^0 \cos180^0$.

Lời giải

1) Viết lại $P = (tg1^0.tg89^0).(tg2^0.tg88^0).(tg43^0.tg47^0)...(tg44^0.tg46^0).tg45^0$

Để ý $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha \Rightarrow tg\alpha(tg(90^0 - \alpha) = tg\alpha cotg\alpha = 1$

Do vậy $P = \underbrace{1.1...1}_{44 \text{ số } 1}.tg45^0 = 1$.

2) Viết lại $Q = (cos10^0 + cos170^0) + (cos30^0 + cos150^0) + (cos50^0 + cos130^0) + (cos70^0 + cos120^0) + cos90^0$.

Để ý $cos(180^0 - \alpha) = -cos\alpha \Leftrightarrow cos(180^0 - \alpha) + cos\alpha = 0$

Do vậy $Q = 0 + 0 + 0 + 0 + cos90^0 = 0$.

3) $cos90^0 = 0 \Rightarrow Q = 0$.

Thí dụ 4

Cho các số $x > 0$, $a > 0$ và $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \frac{\pi}{2})$ thoả mãn các điều kiện

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{a}{x+a}}$, $tg\gamma = \sqrt{\frac{x}{a}}$. Chứng minh $\alpha = \beta = \gamma$.

Lời giải

Theo giả thiết $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$ nên $\cos\beta > 0$. Do vậy :

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{x}{x+a}} = \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \sin\alpha \Rightarrow \beta = \alpha.$$

$$\text{Do } \alpha = \beta \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{x}{x+a}} : \sqrt{\frac{a}{x+a}} = \sqrt{\frac{x}{a}} = tg\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Vậy $\alpha = \beta = \gamma$ (đpcm).

Thí dụ 5

Cho $\cos\alpha = tg\beta$, $\cos\beta = tg\gamma$, $\cos\gamma = tg\alpha$. $(0^0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^0)$.

Chứng minh : $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Lời giải

Ta giả thiết ta có

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = tg^2\beta \\ \cos^2\beta = tg^2\gamma \\ \cos^2\gamma = tg^2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos^2\alpha = 1 + tg^2\beta \\ 1 + \cos^2\beta = 1 + tg^2\gamma \\ 1 + \cos^2\gamma = 1 + tg^2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} 1 + \cos^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\beta} \\ 1 + \cos^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\gamma} \\ 1 + \cos^2\gamma = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

Để đơn giản cách viết ta đặt $x = \cos^2\alpha$, $y = \cos^2\beta$, $z = \cos^2\gamma$.

Điều kiện $0 < x, y, z < 1$.

Hệ (*) trở thành $\begin{cases} 1+x=\dfrac{1}{y} \\ 1+y=\dfrac{1}{z} \\ 1+z=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-y}{y} \\ z=\dfrac{1}{1+y} \\ 1+z=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (**)\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{y}{1-y} & (1) \\ z=\dfrac{1}{1+y} & (2) \\ 1+z=\dfrac{1}{x} & (3) \end{cases}$

Thay (1), (2) vào (3) có : $1+\dfrac{1}{1+y}=\dfrac{y}{1-y} \Leftrightarrow y^2+y-1=0 \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\Rightarrow 1-y=y^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-y}=y$ hay $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vai trò x, y, z bình đẳng như nhau nên hệ (**) $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (đpcm).

Thí dụ 6

Giả sử $\dfrac{\sin^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$. (1)

Chứng minh $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$

Lời giải

Cách 1:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{b\sin^4\alpha+a\cos^4\alpha}{ab}=\dfrac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)(b\sin^4\alpha+a\cos^4\alpha)=ab$

$\Leftrightarrow ab\sin^4\alpha+a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha+ab\cos^4\alpha=ab$

$\Leftrightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha+ab(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1)=0$

$\Leftrightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha+ab[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1]=0$

$\Leftrightarrow a^2\cos^4\alpha+b^2\sin^4\alpha-2ab\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0 \Leftrightarrow (a\cos^2\alpha-b\sin^2\alpha)^2=0$

$\Leftrightarrow a\cos^2\alpha-b\sin^2\alpha=0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin^2\alpha}{a}=\dfrac{\cos^2\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\sin^2\alpha}{a}\right)^4+\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{b}\right)^4=\dfrac{1}{(a+b)^4} \Leftrightarrow \dfrac{\sin^8\alpha}{a^4}=\dfrac{\cos^8\alpha}{b^4}=\dfrac{1}{(a+b)^4}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}=\dfrac{a}{(a+b)^4} \\ \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{b}{(a+b)^4} \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{a+b}{(a+b)^4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$ (đpcm)

Cách 2 :

Đặt $\begin{cases} m = \sin^2\alpha \\ n = \cos^2\alpha \end{cases} \Rightarrow m + n = 1$. Ta có hệ $\begin{cases} m + n = 1 \\ \dfrac{m^2}{a} + \dfrac{n^2}{b} = \dfrac{1}{a+b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{a+b} \\ n = \dfrac{b}{a+b} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{m^4}{a^3} + \frac{n^4}{b^3} = \frac{1}{a^3}\cdot\frac{a^4}{(a+b)^4} + \frac{1}{b^3}\cdot\frac{b^4}{(a+b)^4} = \frac{a+b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}$$

hay $\dfrac{\sin^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3} = \dfrac{1}{(a+b)^3}$ (đpcm).

Thí dụ 7

a) Tính $Q = tg^4\alpha + cotg^4\alpha$, biết $tg\alpha + cotg\alpha = m$.

b) Tính $P = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, biết $\sin\alpha + \cos\alpha = m$.

Lời giải

a) Ta có $tg\alpha + cotg\alpha = m \Rightarrow (tg\alpha + cotg\alpha)^2 = m^2$

$\Leftrightarrow tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2tg\alpha cotg\alpha = m^2 \Leftrightarrow tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2 = m^2$

$\Leftrightarrow tg^2\alpha + cotg^2\alpha = m^2 - 2$

$Q = tg^4\alpha + cotg^4\alpha = (tg^2\alpha + cotg^2\alpha)^2 - 2 = tg^2\alpha cotg^2\alpha = m^2 - 2 - 2$

Vậy $Q = m^2 - 4$

b) Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha=m \Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = m^2$

$\Leftrightarrow (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = m^2 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{m^2-1}{2}$

$Q = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$$= 1^3 - 3\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2\cdot 1 = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{3}{16}.$$

Vậy $Q = -\dfrac{3}{4}m^2 + \dfrac{3}{2}m + \dfrac{3}{16}$.

Thí dụ 8

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α

$P = cotg^2 30^0(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) + 8\cos 60^0\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) + 6\cos^4(90^0 - \alpha)$

Lời giải

Ta có

- $\sin^8\alpha - \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha - \cos^4\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$

$= \sin^6\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^4\alpha - \cos^6\alpha$

$\Rightarrow cotg^2 30^0(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) = 3(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha)$

$= 3\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha\sin^4\alpha - 3\cos^6\alpha$ (1)

- $8(\cos 60^0\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) = 4\cos^6\alpha - 8\sin^6\alpha$ (2)
- $6\cos^4(90^0 - \alpha) = 6\sin^4\alpha$ (3)

Thay (1), (2), (3) vào biểu thức P ta có

$$P = 3\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha\sin^4\alpha - 3\cos^6\alpha + 4\cos^6\alpha - 8\sin^6\alpha + 6\sin^4\alpha$$

$$= -5\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha\sin^4\alpha + \cos^6\alpha + 6\sin^4\alpha$$

$$= (\sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha + 3\cos^2x\sin^4\alpha + \cos^6\alpha) + (6\sin^4\alpha - 6\sin^6\alpha) - 6\cos^2\alpha\sin^4\alpha$$

$$= (\sin^2x + \cos^2x)^3 + 6\sin^4\alpha(1 - \sin^2\alpha) - 6\cos^2\alpha\sin^4\alpha$$

$$= 1 + (6\sin^4\alpha\cos^2\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^4\alpha) = 1 + 0 = 1$$

Vậy P=1 (const) (đpcm).

Thí dụ 9

Cho $2\sin x\sin y - 3\cos x\cos y = 0$ (1)

Với $(x, y) \in (0^0; 90^0) \cup (90^0; 180^0)$

Chứng minh $Q = \dfrac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} + \dfrac{1}{2\sin^2 y + 3\cos^2 y} = \dfrac{5}{6}$ (2)

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\sin x\cos x \neq 0$. Chia theo vế cho cosxsiny, ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2\text{tg}x - 3\text{tg}y = 0 \Leftrightarrow \text{tg}y = \frac{3}{2\text{tg}x} \quad (3)$$

Lại có $Q = \dfrac{1}{\cos^2 x(3 + 2\text{tg}^2x)} + \dfrac{1}{\cos^2 y(3 + 2\text{tg}^2y)} = \dfrac{1 + \text{tg}^2x}{3 + 2\text{tg}^2x} + \dfrac{1 + \text{tg}^2y}{3 + 2\text{tg}^2y}$

$$= \frac{1 + \text{tg}^2x}{3 + 2\text{tg}^2x} + \frac{1 + \dfrac{9}{4\text{tg}^2x}}{3 + 2\dfrac{9}{4\text{tg}^2x}} = \frac{1 + \text{tg}^2x}{3 + 2\text{tg}^2x} + \frac{9 + 4\text{tg}^2x}{6(3 + 2\text{tg}^2x)} \quad (4)$$

Thay (3) vào (4) có $Q = \dfrac{6(1 + \text{tg}^2x) + 9 + 4\text{tg}^2x}{6(3 + 2\text{tg}^2x)} = \dfrac{5(3 + 2\text{tg}^2x)}{6(3 + 2\text{tg}^2x)} = \dfrac{5}{6}$ (đpcm).

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$Q = \left(\frac{\cot g^2x - \cos^2 x}{\cot g^2x}\right) + \frac{\sin x\cos x}{\cot gx}$$

Bài 2. Cho $\dfrac{\sin^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a + b}$. Chứng minh

$$\frac{\sin^{20}\alpha}{a^9} + \frac{\cos^{20}\alpha}{b^9} = \frac{1}{(a + b)^9}$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau đây :

a) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ b) $(\text{tg}x+\text{cotg}x)^2-(\text{tg}x-\text{cotg}x)^2$

c) $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\text{tg}^2x-\sin^2x$ d) $\dfrac{1}{\sin x}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x}+\dfrac{1}{1-\cos x}}-\sqrt{2}$

e) $\sin^2 54^0-3\sin^2 126^0+\sin^2 36^0+\cos^3 126^0-3\cos^2 126^0+\cos^3 36^0$

Bài 4. Chứng minh các hằng đẳng thức

a) $\text{tg}^2x\sin^2x=\text{tg}^2x-\sin^2x)$ b) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

c) $\dfrac{1+\cot gx}{1-\cot gx}=\dfrac{1+\text{tg}x}{1-\text{tg}x}$

d) $\sqrt{\sin^4+6\cos^2x+3\cos^4x}+\sqrt{\cos^4+6\sin^2x+3\sin^4x}=4.$

HƯỚNG DẪN – VẮN TẮT GIẢI

Bài 1. Đáp số Q=1.

Bài 2. Hướng dẫn : Làm tương tự Thí dụ 6.

Bài 3. a) Kết quả bằng -1.

b) Kết quả bằng 4.

c) Kết quả bằng $\cos^2x$.

d) Kết quả bằng $\sqrt{2}\,\text{cotg}^2x$.

Bài 4. a) VP= $\text{tg}^2x(1-\cos^2x)=\text{tg}^2x\sin^2x$ = VT (đpcm)

b) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}=\dfrac{1-\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{\cos^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (đpcm)

c) VT= $\sqrt{(2\cos^2x+1)^2}+\sqrt{(2\sin^2x+1)^2}=2(\cos^2x+\sin^2x)+2=4$ (đpcm)

§3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC TƠ

I. CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

1) Định nghĩa

- Góc giữa hai vectơ :

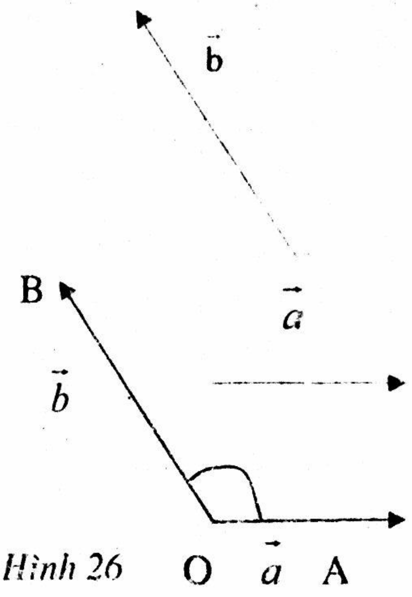
Nếu $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ thì $(\vec{a},\vec{b})=\angle AOB$

Nếu có một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì $(\vec{a},\vec{b})$ nhận một giá trị tuỳ ý thuộc $[0^0, 180^0]$.

Cố nhiên góc giữa hai vectơ không phụ thuộc vào việc chọn điểm O

Như vậy với mọi $\vec{a}$ và luôn có $0^0\leq(\vec{a},\vec{b})\leq 180^0$

$$\begin{cases}(\vec{a},\vec{b})=0^0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng với nhau.}\\(\vec{a},\vec{b})=180^0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng với nhau.}\end{cases}$$



Hình 26

- Tích vô hướng của hai vectơ :

  * $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$, với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- Bình phương vô hướng của một vectơ

  * $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

2) Tính chất của tích vô hướng

* $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$

* $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b})$, với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $k \in R$.

* $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$, với mọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

$(\vec{a}[\pm]\vec{b})^2 = \vec{a}^2[\pm]2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$.

(Quy ước có nhiều dấu [±] trong một đẳng thức thì cùng lấy dòng trên hoặc cùng lấy dòng dưới)

* $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \vec{a} = \vec{0} \text{ hoặc } \vec{b} = \vec{0} \text{ hoặc } \vec{a} \perp \vec{b} \right\}$

Chú ý : * Với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta có $-|\vec{a}|.|\vec{b}| \le \vec{a}.\vec{b} \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

* $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ trái hướng với nhau.

* $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với nhau.

3) Các kết quả của tích vô hướng trong mặt phẳng toạ độ

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$ và $\vec{b} = (x_2; y_2)$ ta có:

* **Định lý** : $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

* **Hệ quả** :
  - $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
  - $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, nếu ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)
  - $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, nếu ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$)

II. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ttam giác. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}$.

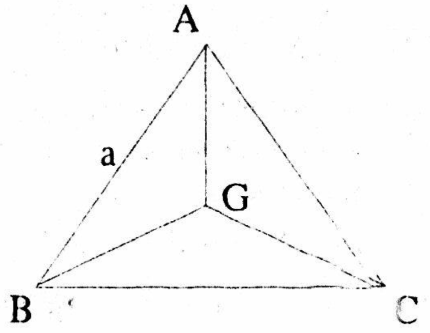
Lời giải

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

  $= a^2\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$

  $= a^2\cos 120^0 = -\dfrac{a^2}{2}$



Hình 27

- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BC}=0$ do $AG \perp BC$

- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC})=a^2\cos30^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

- $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CG}=|\overrightarrow{AG}|.|\overrightarrow{CG}|.\cos(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CG})=\dfrac{4a^2}{9}.\cos120^0=\dfrac{4a^2}{9}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2a^2}{9}$

Thí dụ 2

Chứng minh với bốn điểm bất kì A, B, C, D luôn có

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0 \quad (\textit{hệ thức Ơle}) \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}.(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}.(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} \qquad (4)$$

Cộng vế theo vế các kết quả (2), (3), (4) ta có :

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}+$$
$$+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0$

Lời bình 1.

Bạn có thể sử dụng hệ thức Ơle để giải các bài toán :

a) Chứng minh ba đường cao của một tam giác đồng quy.

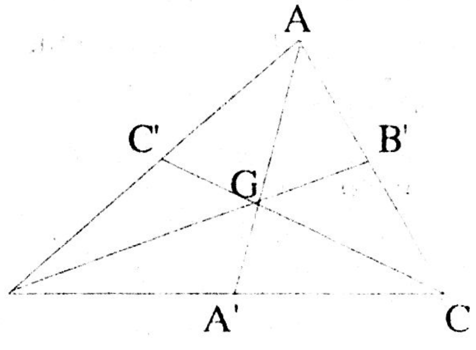
Gọi H là giao điểm của hai đường cao kẻ từ A và B của ΔABC.

Theo hệ thức Ơle: $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0$ (4)

Theo giả thiết $\begin{cases} HA \perp BC \\ HB \perp CA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}=0 \end{cases}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow HC \perp AB$ hay HC là đường cao của tam giác ABC hay ba đường cao của tam giác đồng quy.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}=0$ trong đó A', B', C' theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB.



Hình 28

Cách 1 : Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Rõ ràng $G=AA'\cap BB'\cap CC'$

Theo Ơle $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow (-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GA}).\overrightarrow{BC}+(-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GB}).\overrightarrow{CA}+(-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{GC}).\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}=0$ (dpcm)

Cách 2 : $2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ (1)

$2\overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ (2)

$2.\overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}$ (3)

Cộng theo từng vế các kết quả (1), (2) và (3) ta có

$2(\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB}) =$

$= (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA})$

$= (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'}.\overrightarrow{AB} = 0$ (đpcm)

Lời bình 2.

Chứng minh tương tự cách 1 của b) ta có $\overrightarrow{DA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB'}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC'}.\overrightarrow{AB} = 0$, với A, B, C, D là bốn điểm bất kì và A', B', C' là các điểm được xác định :

$$\overrightarrow{DA'} = k\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DB'} = k\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC'} = k\overrightarrow{DC},\ k \neq 0$$

Lời bình 3.

Khi A, B, C, D thẳng hàng, ta có hệ thức (1) $\Leftrightarrow \overline{DA}.\overline{BC} + \overline{DB}.\overline{CA} + \overline{DC}.\overline{AB} = 0$.

Thí dụ 3

Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Chứng minh rằng cần và đủ để $AC \perp BD$ là :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Lời giải

Ta có $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$\Leftrightarrow (AB^2 - BC^2) + (CD^2 - DA^2) = 0$

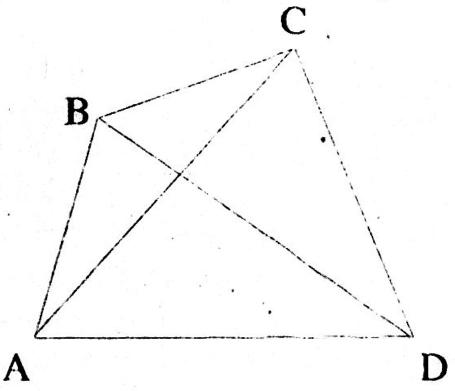
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$

$+ (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp DB$ (đpcm)



Hình 29

Lời bình

- Với bốn điểm bất kì luôn có $(AB^2 - BC^2) + (CD^2 - DA^2) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$
- Kết quả thí dụ trên có thể phát biểu : *Cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là tổng các bình phương của từng cặp cạnh đối diện bằng nhau.*
- Bài toán còn có một vài cách giải khác nữa.

Thí dụ 4

Cho tam giác ABC có BC=a, AC=b, AB=c. Gọi M là trung điểm BC, kí hiệu $AM=m_a$. Chứng minh rằng :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (*định lý cosin*)

3) $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ (*công thức độ dài trung tuyến*)

Lời giải

1) Ta có $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

hay $a^2=b^2+c^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (*)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ (có đpcm)

2) Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = bc\cos A$.

Thay vào (*) có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ (đpcm)

3) *Cách 1*: Ta có $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}^2 = c^2+b^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4m_a^2 - b^2 - c^2$.

Thay vào (*) có $a^2 = b^2 + c^2 - (4m_a^2 - b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^2 = 2(b^2+c^2) - 4ma_2^2$

$\Leftrightarrow m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ (đpcm)

Cách 2: Theo kết quả câu 2), trong tam giác MAB có

$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2\,MA.MB.\cos\alpha$ (1')

Theo kết quả câu 2), trong tam giác MAC có

$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC.\cos(180^0 - \alpha)$ (2')

Để ý $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, $MB = MC = \frac{a}{2}$ nên

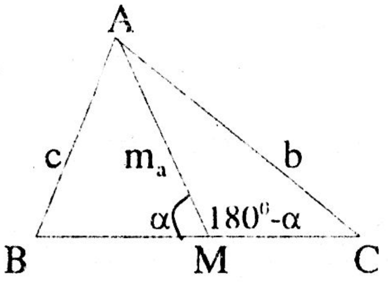
(2') $\Leftrightarrow AC^2 = MA^2 + MB^2 + 2MA.MB.\cos\alpha$ (3')

Cộng các kết quả (1') và (3') ta có

$AB^2 + AC^2 = 2MA^2 + MB^2$

$\Leftrightarrow c^2+b^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

(đpcm). (h 30).



Hình 30

Lời bình.

1) Công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ có tên định lý cosin.

Công thức $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ có tên công thức đường trung tuyến.

Đó là những công thức thường xuyên được sử dụng trong giải toán và chúng ta còn gặp lại chúng sau này.

2) Hoàn toàn tương tự ta có $m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$, $m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ dẫn tới một kết quả đáng nhớ : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Thí dụ 5

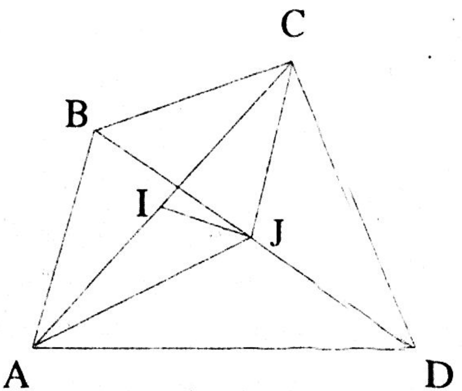
Cho tứ giác ABCD có cạnh AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD= n. Gọi I và J theo thứ tự lần lượt là trung điểm AC, BD.

Chứng minh : $IJ^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2)$ (*Công thức Ơle cho tứ giác*) (1)

Lời giải

áp dụng công thức đường trung tuyến lần lượt vào các tam giác BAD, BCD, AJC ta có :

$$\begin{cases} 2AJ^2 = AB^2+AD^2-\dfrac{BD^2}{2} \\ 2CJ^2 = CB^2+CD^2-\dfrac{BD^2}{2} \\ 4IJ^2 = 2(JA^2+JC^2)-AC^2 \end{cases}$$



Hình 31

Cộng theo từng vế ta có $4IJ^2 = AB^2+AD^2+CB^2+CD^2+AC^2-BD^2-AC^2$

hay $4IJ^2 = a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2 \Leftrightarrow IJ^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2)$ (đpcm)

Lời bình.

- Rõ ràng : Tứ giác ABCD trở thành hình bình hành $\Leftrightarrow I \equiv J \Leftrightarrow IJ=0$ (2)

Từ (1) suy ra : (2) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2-m^2-n^2=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=m^2+n^2$.

Cần và đủ để tứ giác là hình bình hành là tổng các bình phương của bốn cạnh bằng tổng các bình phương của hai đường chéo.

Thí dụ 6

Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c và điểm $M \in BC$. Kí hiệu $AM = x$, $BM = c_1$, $MC = b_1$. Chứng minh rằng :

$$ax^2 = c_1b^2+b_1c^2-ab_1c_1 \qquad (1)$$

Lời giải

Kí hiệu $\alpha = \angle AMB \Rightarrow 180^0 - \alpha = \angle AMC$

Áp dụng định lý cosin vào tam giác AMB, AMC ta có :

- $c^2 = x^2+c_1^2-2xc_1\cos\alpha \Rightarrow b_1c^2 = b_1x^2+b_1c_1^2-2xb_1c_1\cos\alpha$ (2)
- $b^2 = x^2+b_1^2-2xb_1\cos(180^0-\alpha) = x^2+b_1^2-2xb_1\cos\alpha$

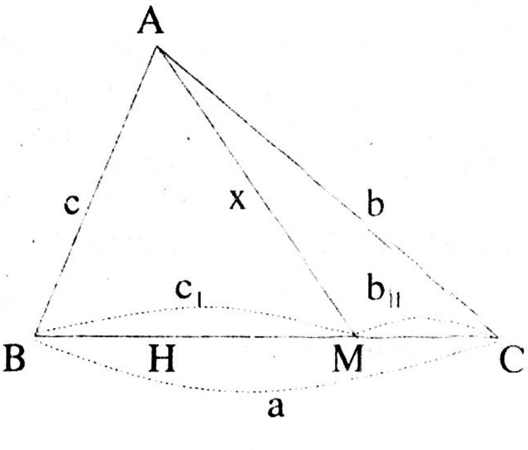
$\Rightarrow c_1b^2 = c_1x^2+c_1b_1^2+2xb_1c_1\cos\alpha$ (3)

Cộng vế theo vế các kết quả (2) và (3) và để ý $b_1+c_1=a$ ta có

$b_1c^2+c_1b^2 = x^2(b_1+c_1)+b_1c_1(b_1+c_1)$

$\Leftrightarrow b_1c^2+c_1b^2 = ax^2+ab_1c_1$

$\Leftrightarrow ax^2 = c_1b^2+b_1c^2-ab_1c_1$ (đpcm).



Hình 32

Lời bình

- Công thức (1) có tên là *hệ thức Stewart.*
- Khi M là trung điểm BC $\Leftrightarrow b_1=c_1=\frac{a}{2}$ ta có

(1) $\Leftrightarrow ax^2=\frac{a}{2}b^2+\frac{a}{2}c^2-a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$.

Đó là công thức đường trung tuyến trong thí dụ 4.

- Khi AM là đường phân giác ta có $\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$ kết hợp với $b_1+c_1=a$ suy ra

$c_1=\frac{ac}{b+c}$, $b_1=\frac{ab}{b+c}$ ta có (1) ⇔ $ax^2=\frac{ac}{b+c}b^2+\frac{ab}{b+c}c^2-a\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2} \Leftrightarrow x^2=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{4bc.p(p-a)}{(b+c)^2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)}$$

Cho ta công thức tính đường phân giác trong góc A là :

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)} \quad \text{hay} \quad l_a^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

Thí dụ 7

Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh với mọi M ta có :

$$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2 \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có : $+\begin{cases} MA^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2=MG^2+GA^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} \\ MB^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=MG^2+GB^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB} \\ MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=MG^2+GC^2+2\,\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC} \end{cases}$

Cộng theo từng vế ta có

$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2+2\,\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$ (2)

Do $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên từ (2) suy ra

$$\begin{aligned} MA^2+MB^2+MC^2 &= GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2+2\,\overrightarrow{MG}.\vec{0} \\ &= GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2+0 \end{aligned}$$

hay $MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$ (có đpcm)

Lời bình 1

Sự hiện hữu của $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ gợi ta nghĩ tới vai trò tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C. Các bạn theo dõi thí dụ dưới đây.

Thí dụ 8

Cho tam giác ABC. Gọi J là tâm tỉ cự của A, B, C theo bộ số (α, β, γ), tức là $\alpha\overrightarrow{JA}+\beta\overrightarrow{JB}+\gamma\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ với $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Chứng minh với mọi M ta có :

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=\alpha JA^2+\beta JB^2+\gamma JC^2+(\alpha+\beta+\gamma)MJ^2 \qquad (1)$$

Lời giải

Ta có $+\begin{cases} \alpha MA^2=\alpha(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA})^2=\alpha JA+\alpha MJ^2+\alpha\,\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JA} \\ \beta MB^2=\alpha_2(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB})^2=\beta JB^2+\beta MJ^2+\beta\,\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JB} \\ \gamma MC^2=\gamma(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC})^2=\gamma JC^2+\gamma MJ^2+\gamma\,\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JC} \end{cases}$

Cộng theo từng vế các đẳng thức trên ta có :

$$\alpha MA^2 + MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MJ^2 + \alpha JA^2 + \beta JC^2 + \gamma JC^2 +$$
$$+ \overrightarrow{MJ}(\alpha\,\overrightarrow{JA} + \beta\,\overrightarrow{JB} + \gamma\,\overrightarrow{JC} = \vec{0}) \qquad (2)$$

Do $\alpha\,\overrightarrow{JA} + \beta\,\overrightarrow{JB} + \gamma\,\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ nên

(2) $\Leftrightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \alpha JA^2 + \beta JC^2 + \gamma JC^2 + (\alpha+\beta+\gamma)MJ^2$ (đpcm)

Lời bình 2.

- Với $n = 3$ và $\alpha = \beta = \gamma$, công thức (1) cho lại kết quả thí dụ 5.
- Cho J đứng ở vị trí là các tâm tỉ cự đặc biệt của tam giác (*trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, tâm đường tròn nội tiếp I*), khi đó (1) cho ta các hệ thức đặc biệt :

Chẳng hạn J≡I (tâm đường tròn nội tiếp) ta có :

(1) $\Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = aIA^2 + bIB^2 + CIC^2 + (a + b + c)MI^2$

- Cho J đứng ở vị trí là các tâm tỉ cự đặc biệt của đoạn thẳng, khi đó (1) cho ta các hệ thức đặc biệt :

* Chẳng hạn, trong tam giác ABC cho J là tâm tỉ cự của hai điểm B, C theo bộ số (c_1, b_1) tức là $b_1\overrightarrow{JB} + c_1\overrightarrow{JC}$, với $b_1 > 0$, $c_1 > 0$ ta có *hệ thức Stewart.*

Thật vậy : (h33). Kí hiệu AJ = x,

Cho A đóng vai trò của M ta có

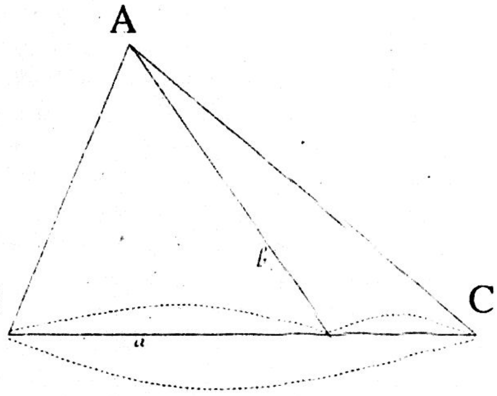
(1) $\Leftrightarrow c_1AC^2 + b_1AB^2 = c_1JC^2 + b_1JB^2 + (b_1+c_1)AJ^2$

$\Leftrightarrow c_1b^2 + b_1c^2 = b_1c_1^2 + c_1b_1^2 + a\,x^2$

$\Leftrightarrow c_1b^2 + b_1c^2 = b_1c_1(b_1+c_1) + a\,x^2$

$\Leftrightarrow c_1b^2 + b_1c^2 = b_1c_1a + a\,x^2$

$\Leftrightarrow ax^2 = c_1b^2 + b_1c^2 - ab_1c_1$ (dpcm)



Hình 33

* Cho J đứng vị trí là trung điểm BC (<-> $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$), ta có công thức đường trung tuyến $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

Thật vậy : Cho A đóng vai trò của M ta có

(1) $\Leftrightarrow AC^2 + AB^2 = JC^2 + JB^2 + (1+1)AJ^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + 2m_a^2$

$\Leftrightarrow m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ (dpcm).

* Cho J đứng vị trí là chân đường phân giác góc A trên BC ($\Leftrightarrow b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$) ta có công thức đường phân giác góc A: $l_a^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2}p(p - a)$

Thật vậy : Cho A đóng vai trò của M ta có

(1) $\Leftrightarrow c.AC^2 + b.AB^2 = c.JC^2 + b.JB^2 + (b + c)\,AJ^2$ hay

$$cb^2 + bc^2 = c.JC^2 + b.JB^2 + (b + c)l_a^2 \qquad (2)$$

Để ý $b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow (b + c)\overrightarrow{JB} + c(\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (b + c)\overrightarrow{JB} = c\overrightarrow{CB}$

$$\Rightarrow JB=\frac{ac}{b+c},\ JC=\frac{ab}{b+c}.$$

Thay vào (2) có $bc(b+c)=c\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+b\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+(b+c)l_a^2$

$$\Leftrightarrow bc(b+c)=\frac{a^2bc}{b+c}+(b+c)l_a^2 \quad \Leftrightarrow l_a^2=bc-\frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow l_a^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2} \quad \Leftrightarrow l_a^2=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow l_a^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$ (đpcm)

Lời bình 3.

Hoàn toàn tương tự ta có kết quả cho bài mở rộng đối với hệ n điểm như sau : Nếu J là tâm tỉ cự của hệ n điểm $\{A_1, A_2, \dots A_n\}$ theo bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ thì với mọi điểm M ta có :

$$\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\dots+\alpha_n MA_n^2=\alpha_1 JA_1^2+\alpha_2 JA_2^2+\dots+\alpha_n JA_n^2+ +(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)MJ^2 \qquad (3)$$

(Công thức (3) có tên gọi là công thức *Jacôbi*)

Lời bình 4.

- Công thức *Jacôbi* cho thấy tổng $\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\dots+\alpha_n MA_n^2$ phụ thuộc vào một yếu tố duy nhất là độ dài đoạn MJ. Từ đây có hai kết quả đáng ghi nhận phát biểu cho n - giác đều $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R :

1) Tập hợp các điểm M thoả mãn $MA_1^2+MA_2^2+\dots+MA_n^2=k^2$, với k là hằng số và $k > nR^2$ là đường tròn tâm O, bán kính $r=\sqrt{\frac{k^2}{n}-R^2}$

2) Nếu $|\overrightarrow{MJ}|$ không đổi (tức M thuộc một đường tròn tâm J, bán kính cố định nào đó) thì $MA_1^2+MA_2^2+\dots+MA_n^2$ cũng không đổi. Đó là lý do giải thích sự xuất hiện của bài toán : *Chứng minh* $MA_1^2+MA_2^2+\dots+MA_n^2$ *không phụ thuộc vào vị trí của điểm M khi nó thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp đa giác đều* $A_1A_2\dots A_n$.

- Một kết quả khác mà công thức *Jacôbi* đưa lại nữa là

$\min(\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+\dots+\alpha_n MA_n^2)=0$, đạt được khi $M\equiv J$.

Thí dụ 9

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Lời giải

Gọi P, Q theo thứ tự lần lượt là trung điểm của AD, BC. Ta có :

- $OP \perp AD,\ OQ \perp BC$ (*)
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

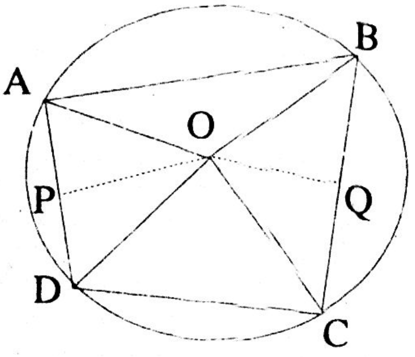
$\Leftrightarrow\ 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ O là trung điểm đoạn thẳng PQ

$\Rightarrow OP = OQ$.

Kết hợp với (*) suy ra $\begin{cases} AD = BC \\ AD // BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.



Hình 34

Là hình bình hành nội tiếp đường tròn nên ABCD là hình chữ nhật.

(đpcm)

Điều ngược lại : ABCD là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 10

Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC, J là trung điểm PQ.
Về phía ngoài của tam giác ta dựng các tam giác vuông tại A là ΔABP và ΔCAQ

a) Nếu $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AB}{AC}$ hãy chứng minh : $AI \perp PQ$, $AJ \perp BC$.

b) Nếu $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC} = 1$ hãy chứng minh $BQ \perp CP$, $BC^2 + PQ^2 = BP^2 + CQ^2$.

Lời giải

a) I là trung điểm BC $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Suy ra $2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP})$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AP} \quad (1)$$

$$\text{Do } \begin{cases} AB \perp AP \\ AC \perp AQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AQ} = \vec{0} \end{cases} \quad (2)$$

Nên từ (1) có $2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AP}$

$$= AB.AQ\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AQ}) - AC.AP\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}) \quad (3)$$

Theo giả thiết :

- $\angle BAP = \angle CAQ = 90^0$

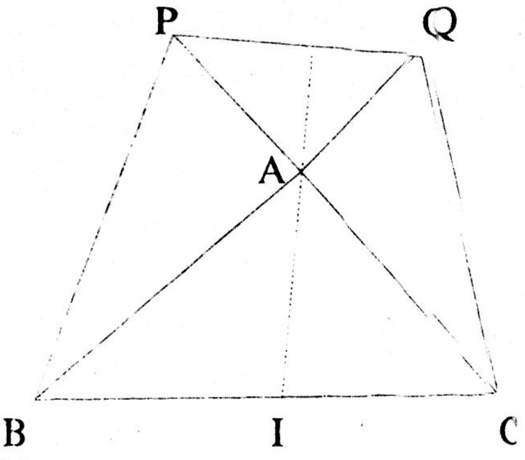
$\Rightarrow\ (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AQ}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP})$ (4)

- $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow AB.AQ = AC.AP$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} = 0$

$\Leftrightarrow AI \perp PQ$ (đpcm)

Tương tự ta cũng có $AJ \perp BC$



Hình 35

b) Theo giả thiết $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AP \\ AC = AQ \end{cases}$ (6)

$\overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{PC} = (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$

Từ (4), (6) suy ra $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (7)

Từ (2), (7) suy ra $\overrightarrow{BQ}.\overrightarrow{PC} = 0$ hay $BQ \perp CP$ (đpcm).

• Tứ giác BCQP có hai đường chéo vuông góc với nhau, theo kết quả Thí dụ 8 suy ra $BC^2 + PQ^2 = BP^2 + CQ^2$ (đpcm).

Nhận xét : Ta còn có kết quả AQ = CP (Bạn đọc tự chứng minh)

Thí dụ 11

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Tìm vị trí của điểm M sao cho tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải

. Theo kết quả thí dụ 6 (hay sử dụng hệ thức Jacôbi), gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

Do vậy tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ lớn nhất (*nhỏ nhất*) khi và chỉ khi MG^2 lớn nhất (*nhỏ nhất*). Gọi M_0, M_1 là đường kính qua G của đường tròn O và G thuộc bán kính OM_0. Rõ ràng

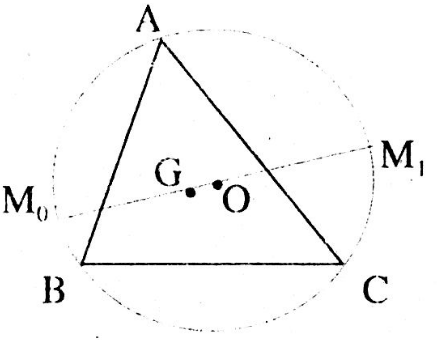
• Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow M \equiv M_1$

• Tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M \equiv M_0$ (h36)

(Đường thẳng M_0M_1 là đường thẳng Ơle).



Hình 36

Chú ý : Khi ΔABC là tam giác đều thì với mọi M thuộc đường tròn (O) đều có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$. Người ta không đặt vấn đề tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2 + MC^2$ trong trường hợp này.

Thí dụ 12

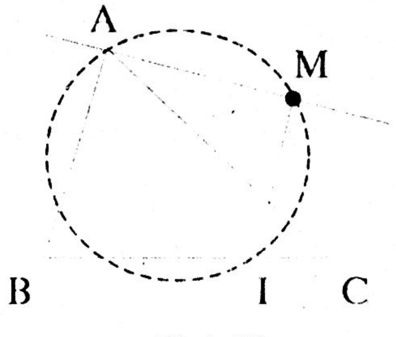
Cho tam giác ABC, các số thực α và β. Gọi (Δ) là đường thẳng thay đổi luôn đi qua A. Tìm tập hợp các điểm $M \in (\Delta)$ và $\alpha MB^2 + \beta MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1: Gọi I là tâm tỉ cự của hai điểm B và C theo bộ số (α, β) tức là $\alpha\overrightarrow{IB} + \beta\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{CB}$ (1)

Theo *hệ thức Jacôbi*, với mọi điểm M ta có $\alpha MB^2 + \beta MC^2 = \alpha IB^2 + \beta IC^2 + (\alpha + \beta)MI^2$



Hình 37

Rõ ràng $\alpha IB^2 + \beta IC^2$ không đổi suy ra $\alpha MB^2+\beta MC^2$ đạt trị số nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. $M \in (\Delta)$ nên MI nhỏ nhất khi và chỉ khi $MI \perp (\Delta)$

$\Leftrightarrow$ Góc $\angle AMI=90^0$. (2)

Bởi A và I cố định nên từ (2) suy ra tập hợp điểm M phải tìm là đường tròn đường kính AI. (h 37)

Cách 2: (Tiếp nối từ (1))

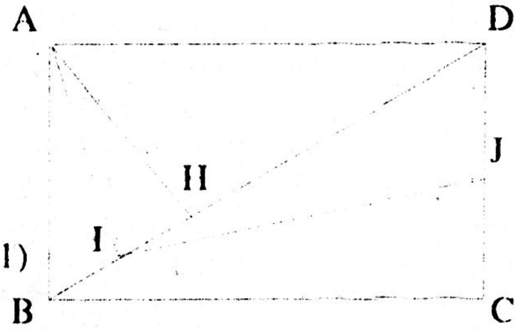
Theo *hệ thức Stewart* ta có $BC.MI^2 = BI.MC^2 + IC.MB^2 - BC.BI.IC$

$\Leftrightarrow \dfrac{BI}{BC}MC^2 + \dfrac{IC}{BC}MB^2 = MI^2 + BI.IC \Leftrightarrow \alpha MB^2 + \beta MC^2 = MI^2 + BI.IC$. Rõ ràng BI.IC không đổi suy ra $\alpha MB^2 + \beta MC^2$ đạt trị số nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất. Phần còn lại như cách 1.

Thí dụ 13

Cho hình chữ nhật ABCD. H là chân đường vuông góc hạ từ A đến BD; I, J theo thứ tự là trung điểm của BH và CD. Chứng minh $AI \perp IJ$.

Lời giải



Hình 38

Do I, J theo thứ tự là trung điểm của BH và CD, nên ta có $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$, $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD}$. Bởi thế:

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}$ (1)

Do $AB \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$, $AH \perp BD$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD} = 0$. Thay vào (1) có

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AH}) + \overrightarrow{AH}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}\overrightarrow{BD}$ (2)

Do $AB \perp AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$, $AH \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD} = 0$. Thay vào (2) có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = 0$ $\Leftrightarrow AI \perp IJ$ (đpcm). (h38).

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC có AB = 2; AC = 3; $\hat{A} = 60^0$. Tính độ dài cạnh BC, phân giác AD và trung tuyến AM.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD và đường thẳng (Δ). Tìm trên đường thẳng (Δ) điểm M sao cho $(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2)$ nhỏ nhất.

Bài 3. Chứng minh rằng nếu một trong các đẳng thức sau đúng với mọi điểm M thì tứ giác ABCD là hình chữ nhật :

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

c) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2$.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Tìm trên đường tròn O điểm M sao cho : $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Bài 6. Tính tổng các bình phương các cạnh và các đường chéo của n-giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

Bài 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O bán kính R; H là trực tâm ΔABC.

Chứng minh rằng $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

Áp dụng : Trong các tam giác nội tiếp đường tròn tâm O, tìm tam giác có tổng bình phương các khoảng cách từ tâm O đến các cạnh là nhỏ nhất.

Bài 8. Cho tam giác ABC có độ dài BC=a, CA=b, AB=c. Gọi M là một điểm bất kì trong tam giác và A_0, B_0, C_0 là hình chiếu của điểm M lần lượt trên BC, CA, AB. A', B' C' là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MA'} = \frac{a}{MA_0}\overrightarrow{MA_0}$, $\overrightarrow{MB'} = \frac{b}{MB_0}\overrightarrow{MB_0}$, $\overrightarrow{MC'} = \frac{a}{MC_0}\overrightarrow{MC_0}$. Chứng minh M là trọng tâm tam giác A'B'C'.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD. E, F là hình chiếu của C trên AB, AD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = AC^2$.

Bài 10*. Cho hai đường thẳng x'OX, y'Oy và hai số thực α và β. $A \in x'OX$, $B \in y'Oy$ thoả mãn $\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} = 1$. Chứng minh khi A, B thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB luôn đi qua một điểm cố định khác O.

Bài 11*. Cho tam giác ABC cân tại A. (Δ_1), (Δ_2) là hai đường thẳng bất kì qua A. Các đường thẳng qua B, C tương ứng vuông góc với (Δ_1), (Δ_2) cắt nhau tại D. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt (Δ_1) tại E. Đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt (Δ_2) tại F. Chứng minh $AD \perp EF$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có các cạnh bằng BC=a, CA=b, AB=c. Gọi H và O theo thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Giả sử I và J lần lượt là trung điểm của HA, BC. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Hãy chứng minh :

1) OH và IJ có cùng trung điểm.

2) $AH^2 = 4R^2 - a^2$

3) Với mọi M luôn có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2)$ là một đại lượng không đổi.

Bài 13. Chứng minh đường tròn Ơle (đường tròn 9 điểm) của một tam giác tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Bài 14. Trên mặt phẳng cho hai hình vuông cùng hướng ABCD và $A_1B_1C_1D_1$.

Chứng minh rằng $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2$

Bài 15. Cho tứ giác ABCD, Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. I, J theo thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi H, K theo thứ tự là trực tâm tam giác ABO và CDO. Chứng minh $IJ \perp HK$

HƯỚNG DẪN–VẮN TẮT LỜI GIẢI

Bài 1. • $BC = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos60^0 = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$

• Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

- Áp dụng công thức đường phân giác ta có $AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(b+c-a) = \frac{6}{25}(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7}) = \frac{108}{25} \Rightarrow AD = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Bài 2. Gọi G là trọng tâm tứ giác ABCD, tức là $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Với mọi điểm M ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = 4MG^2+(GA^2+GB^2+GC^2+GD^2)$

$\Rightarrow$ Tổng $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là chân đường vuông góc hạ từ G đến đường thẳng (Δ).

Bài 3. a) Giả sử $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}$ đúng với mọi M.

Cho M trùng với A, B ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0\\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AB \perp BC & (1)\\ BA \perp AD & (2)\end{cases}$

Cho M trùng với C ta có

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC} \Rightarrow (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}).\overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$ (do $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$)

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow CB \perp CD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ABCD là hình chữ nhật (đpcm).

b) Giả sử $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$ với mọi M. Cho M lần lượt trùng với A, B, C ta

có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0\\ \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}AB \perp AD\\ BA \perp BC\\ CB \perp CD\end{cases} \Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật (đpcm)

c) Giả sử $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$ với mọi M. Cho M lần lượt trùng với

A, C, B, D ta có $\begin{cases}AC^2 = AB^2+AD^2\\ CA^2 = CB^2+CD^2\\ BD^2 = BA^2+BC^2\\ DB^2 = DA^2+DC^2\end{cases}$ (4)

Cộng theo từng vế các đẳng thức trong (4) ta có

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2 \Rightarrow$ ABCD là hình bình hành (5)

(*xem lời bình Thí dụ 5 - công thức Ơle cho tứ giác*)

Từ (4), (5) $\Rightarrow$ AC=BD do vậy ABCD là hình chữ nhật.

Bài 4. Ta có $AB^2+CD^2 = (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})^2 = 4R^2-2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD})$

$= 4r^2-2R^2(\cos\angle AOB+\cos\angle COD)$.

Bởi thế $AB^2+CD^2=4R^2 \Leftrightarrow \cos\angle AOB+\cos\angle COD=0$

$\Leftrightarrow \angle AOB+\angle COD=180^0 \Leftrightarrow AC \perp BD$ (đpcm)

Bài 5. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm AC, BD.

- Nếu P≡Q thì ABCD là hình chữ nhật. Khi đó với mọi điểm M trên đường tròn (O) ta đều có $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2=4R^2$.

- Nếu P≠Q, ta có $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{QP} = 0 \Leftrightarrow OP \perp PQ$

Vậy có hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán đó là hai đầu mút của đường kính đường tròn (O) vuông góc với PQ.

Bài 6. *Hướng dẫn* : Xem lời bình 4 Thí dụ 8§3–công thức Jacôbi)

Kết quả của tổng là n^2R^2.

Bài 7. Theo Thí dụ13§2, ta có $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA})$$
$$= 3R^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2) + (OB^2 + OC^2 - BC^2) + (OC^2 + OA^2 - CA^2)$$
$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ (đpcm).}$$

Áp dụng : Gọi khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là d_a, d_b, d_c

ta có $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \left(R^2 - \frac{c^2}{4}\right)$

$$= 3R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2 - \frac{1}{4}(9R^2 - OH^2) = \frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{4}OH^2 \geq \frac{3}{4}R^2$$

Vậy $\min(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) = \frac{3}{4}R^2 \Leftrightarrow OH = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 8. Ta có $(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})^2 = MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 +$

$$+2(\overrightarrow{MA_1}\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_1}\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_1}\overrightarrow{MA_1})$$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab\cos\angle A_1MB_1 +$

$+ bc\cos\angle A_1MC_1 + ca\cos\angle C_1MA_1)$

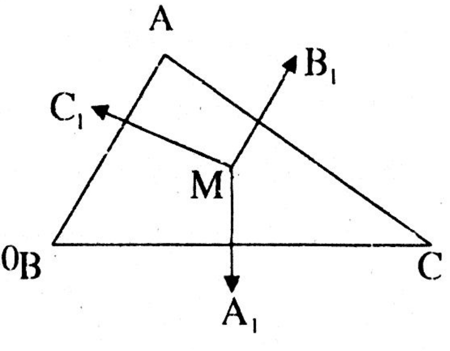
$= a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B)$

$= (a^2 + b^2 - 2ab\cos C) + (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)$

$+ (c^2 + a^2 - 2ca\cos B) - (a^2 + b^2 + c^2)$

$= (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{0}$

$\Rightarrow$ M là trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$ (đpcm). (h39)



Hình 39

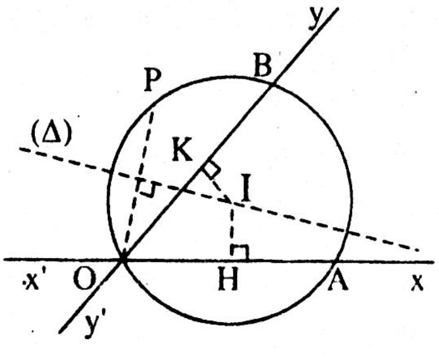
Bài 9. Theo công thức hình chiếu ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = AC^2$ (đpcm).

Bài 10. Gọi I là tâm đường tròn (OAB), $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ là các đơn vị của x'Ox, y'Oy; H, K là hình chiếu của I trên x'Ox và y'Oy và $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$

Ta có $\overrightarrow{OI}(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}) = \alpha\overrightarrow{OI}\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{OI}\overrightarrow{e_2}$

$$= \alpha\overrightarrow{OH} + \beta\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}$$



Hình 40

Tóm lại $\overrightarrow{OI}.\vec{u} = \frac{1}{2}$. Gọi I_0 là một điểm thoả mãn $\overrightarrow{OI_0}.\vec{u} = \frac{1}{2}$ suy ra $(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OI_0}).\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{I_0I}.\vec{u} = 0 \Rightarrow I_0I \perp \vec{u} \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng (Δ) đi qua I_0 và vuông góc với $\vec{u}$. Một cách nói khác : (Δ) là trục đối xứng của (OAB). Bởi vậy, gọi P là điểm đối xứng của O qua (Δ). Đường tròn (OAB) qua O ắt phải qua P. Vậy P là điểm cố định mà đường tròn (OAB) luôn đi qua (đpcm).(h40)

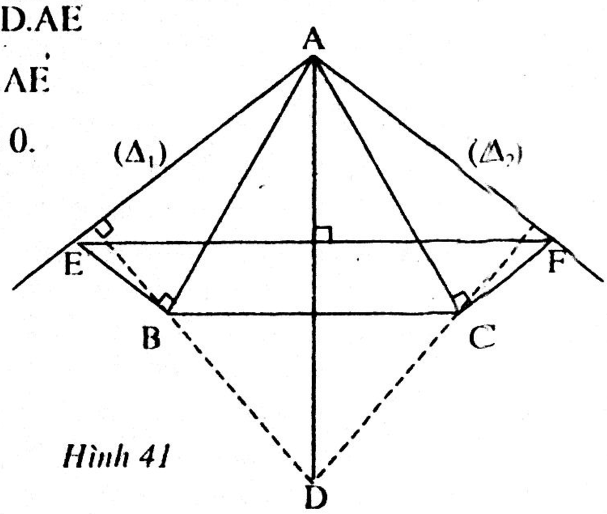
Bài 11. *Hướng dẫn* : (h41)

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{AE}$$

$$= \overrightarrow{AC}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AC^2 - AB^2 = 0.$$

Vậy ADF⊥EF (đpcm)



Hình 41

Bài 12. *Hướng dẫn* :

1) Theo Thí dụ 13§2: $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ đpcm

2) Theo Thí dụ 13§2 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow AH^2 = OB^2 + OC^2 + 2OB.OC\cos\angle BOC$$

$$= 2R^2 + (OB^2 + OC^2 - BC^2) = 4R^2 - a^2 \text{ (đpcm)}$$

3) Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$$= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \qquad (*)$$

Theo Thí dụ 13§2 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, do vậy

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH}$$

$$= 2MO^2 + 3R^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH})^2 - OH^2 = 2MO^2 + 3R^2 + MH^2 - OH^2$$

$\Rightarrow S = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2) = 3R^2 - OH^2$ (const)

Vậy S là một đại lượng không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của M. (đpcm)

Bài 13. Gọi H, O, I, ϖ theo thứ tự là trực tâm, tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và đường tròn Ơle của tam giác ABC, a, b, c, R, r theo thứ tự là độ dài các cạnh và bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác đó (chú ý ϖ là trung điểm của OH).

Từ các hệ thức $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ta suy ra được

$$2p\overrightarrow{OI} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC},$$

$$2p\overrightarrow{O\varpi} = p.\overrightarrow{OA} + p.\overrightarrow{OB} + p.\overrightarrow{OC} \text{ (với } 2p = a + b + c)$$

$$\Rightarrow 2p(\overrightarrow{O\varpi} - \overrightarrow{OI}) = (p - a).\overrightarrow{OA} + (p - b).\overrightarrow{OB} + (p - c).\overrightarrow{OC}$$

$\Rightarrow 2p\overrightarrow{I\varpi} = (p-a)\overrightarrow{OA} + (p-b)\overrightarrow{OB} + (p-c)\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow 4p^2\varpi I^2 = R^2[(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2]+2(p-a)(p-b)\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} +$

$+2(p-b)(p-c)\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} +2(p-c)(p-a)\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow 4p^2\varpi I^2=R^2[(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2]$

$+(p-a)(p-b)(2R^2-c^2)+(p-b)(p-c)(2R^2-a^2)+(p-c)(p-a)(2R^2-b^2)$

$= p^2R^2 - a^2(p-b)(p-c) - b^2(p-c)(p-a) - c^2(p-a)(p-b)$

$= p^2R^2 - \frac{1}{4}[a^2(b^2+c^2-a^2-2bc)+b^2(c^2+a^2-b^2-2ca)+c^2(a^2+b^2-c^2-2ab)]$

$= p^2R^2 - \frac{1}{4}[a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4pabc]$

$= p^2R^2 - \frac{1}{4}[(4pabc - 16S^2) = p^2R^2 - pabc + 4S^2 = p^2R^2 - p.4SR + 4p^2r^2$

$= p^2R^2 - 4Rp^2r + 4p^2r^2 = p^2(R^2 - 4Rr + 4r^2) = p^2(R-2r)^2$

Tóm lại $4p^2\varpi I^2 = p^2(R-2r)^2 \Leftrightarrow 4\varpi I^2=(R-2r)^2 \Leftrightarrow \varpi I = \frac{R}{2}-r$ (do $R \geq 2r$)

Điều này chứng tỏ đường tròn Ơle (tâm ϖ, bán kính $\varsigma=\frac{R}{2}$) tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp (tâm I, bán kính r) của ΔABC

Bài 14. (h 42 *ở dưới*) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec a$, $\overrightarrow{AD} = \vec b$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec a_1$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec b_1$, $\overrightarrow{CA_1} = \vec c$

Ta có $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA_1} = \vec a + \vec b + \vec c$

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \vec a_1 + \vec b_1 + \vec c$

Tương tự có $\overrightarrow{BB_1} = \vec a_1 + \vec b + \vec c$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec a + \vec b_1 + \vec c$

Và $AA_1^2 + CC_1^2 = (\vec a + \vec b + \vec c)^2 + (\vec a_1 + \vec b_1 + \vec c)^2$

$= \vec a^2 + \vec b^2 + \vec a_1^2 + \vec b_1^2 + 2\vec c^2 + 2\vec a.\vec c + 2\vec b.\vec c + 2\vec a_1.\vec c + 2\vec b_1.\vec c \quad (1)$

(Do $\vec a \perp \vec b$ và $\vec a_1 \perp \vec b_1$ nên $2\vec a.\vec b = 2\vec a_1.\vec b_1 = 0$

Tương tự có : $BB_1^2 + DD_1^2 = (\vec a_1 + \vec b + \vec c)^2 + (\vec a + \vec b_1 + \vec c)^2$

$= \vec a^2 + \vec b^2 + \vec a_1^2 + \vec b_1^2 + 2\vec c^2 + 2\vec a_1.\vec b + 2\vec a_1.\vec c + 2\vec b.\vec c + 2\vec a.\vec b_1 + 2\vec a.\vec c + 2\vec b_1.\vec c \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra $AA_1^2 + CC_1^2 = BB_1^2 + DD_1^2 \Leftrightarrow \vec a_1.\vec b + \vec a.\vec b_1 = 0$. (3)

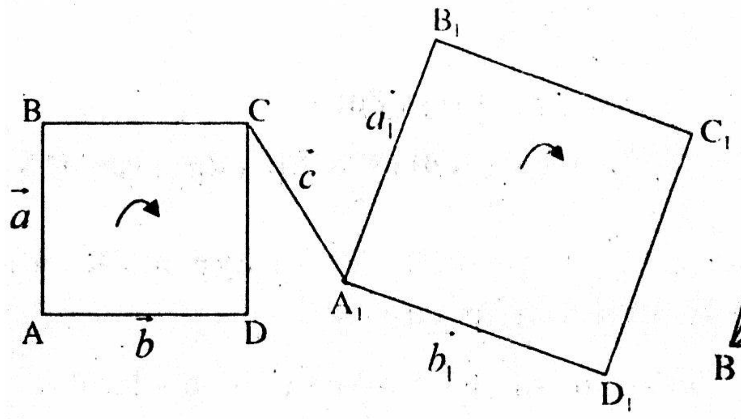
Theo giả thiết ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ là hai hình vuông cùng hướng nên

$\angle(\vec a, \vec b) + \angle(\vec a_1, \vec b_1) = 180^0 \Rightarrow \cos(\vec a, \vec b_1) = -\cos(\vec a_1, \vec b)$. (4)

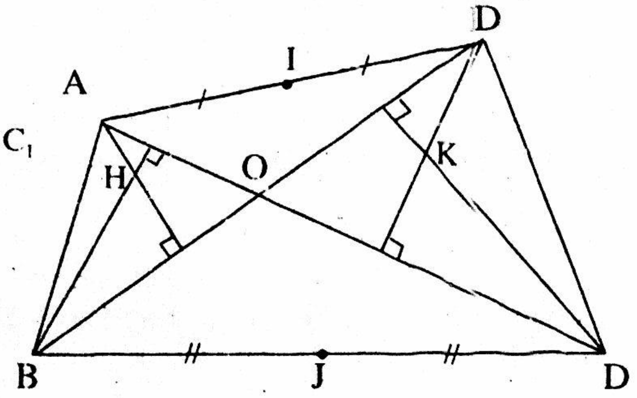
Lại có $|\vec a| = |\vec b|, |\vec a_1| = |\vec b_1|$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $\vec a_1.\vec b + \vec a.\vec b_1 = (|\vec a||\vec a_1| - |\vec a_1||\vec a|)\cos(\vec a, \vec b_1) = 0$ (6)

Vậy (6) đúng $\Leftrightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ có điều phải chứng minh.



Hình 42



Hình 43

Bài 15. (h 43–*ở trên*)

$$2\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC}$$

$= \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{DC}$ (do $OK \perp DC$ và $OH \perp AB$)

$$= \overrightarrow{OK}.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OH}.(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OD}$$

$$= (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}).\overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DK}).\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}).\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{OD}$$

$$= \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CK}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OD}$$

$$= \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} = 0$$

(do $CK \perp OB$, $DK \perp OA$, $BH \perp OC$, $AH \perp OD$)

Tóm lại $2\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow HK \perp IJ$. Đó là điều phải chứng minh.

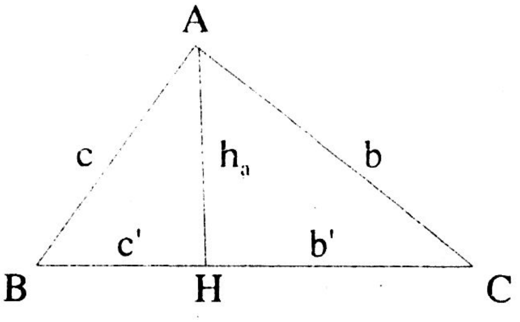
Chương II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Hệ thức lượng trong tam giác vuông



Hình 44

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có các hệ thức sau :

$A = B + C$

$a^2 = b^2 + c^2$

$b^2 = ac', c^2 = ac', h^2 = b'.c'$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

II. Hệ thức lượng trong tam giác thường

1) Định lý cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

Hệ quả : $cosA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $cosB = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $cosC = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2) Định lý sin : $\dfrac{a}{sinA} = \dfrac{b}{sinB} = \dfrac{c}{sinC} = 2R$

Hệ quả : $a = 2RsinA$, $b = 2RsinB$, $c = 2RsinC$

3) Các công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bcsinA = \frac{1}{2}acsinB = \frac{1}{2}absinC = \frac{abc}{4R}$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (*Hêrông*)

$$= pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

4) Bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp

$$r = (p-a)tg\frac{A}{2} = (p-b)tg\frac{B}{2} = (p-c)tg\frac{C}{2}$$

$$r_a = ptg\frac{A}{2}$$

$$r_b = ptg\frac{B}{2}$$

$$r_c = ptg\frac{C}{2}$$

5. Công thức độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \qquad b^2+c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \qquad c^2+a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$m_c^2 = \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{c^2}{4} \qquad a^2+b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

6. Công thức đường phân giác

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc.p(p-a)} = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \Leftrightarrow l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

$$l_a = \frac{2}{c+a}\sqrt{ca.p(p-b)} = \frac{2ca.\cos\frac{B}{2}}{c+a} \Leftrightarrow l_b^2 = \frac{ca[(c+a)^2-b^2]}{(c+a)^2}$$

$$l_a = \frac{2}{a+b}\sqrt{ab.p(p-c)} = \frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{b+c} \Leftrightarrow l_c^2 = \frac{bc[(a+b)^2-c^2]}{(a+b)^2}$$

Lời bình.

Từ định lý hàm số cosin suy ra

$A > 90^0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

$A = 90^0 \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2$ (Định lý Pitago)

$A < 90^0 \Leftrightarrow c^2 < a^2 + b^2$

II. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1.

Cho tam giác ABC. Gọi l_a là độ dài đường phân giác trong góc A.

Chứng minh $l_a = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

Lời giải

Cách 1 : Đã biết $l_a^2 = \dfrac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$ (xem §2,Thí dụ 8-Lời bình 2) (1)

Theo định lí cosin thì $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Thay vào (1) ta có

$$l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2-(b^2+c^2-2bc.\cos A)]}{(b+c)^2} = \frac{2b^2c^2(1+\cos A)}{(b+c)^2} = \frac{4b^2c^2.\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$\Leftrightarrow l_a = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ (đpcm).

Cách 2: Gọi D là chân đường phân giác trong góc A trên BC. Lại gọi S, s_1, s_2 theo thứ tự là diện tích tam giác ABC, ABD, ACD. Kí hiệu $AD=l_a$.

Ta có $2s_1=\ell_a^2.c.\sin\frac{A}{2}$, $2s_2=\ell_a^2.b.\sin\frac{A}{2}\Rightarrow 2(s_1+s_2)=\ell_a^2(b+c)\sin\frac{A}{2}$

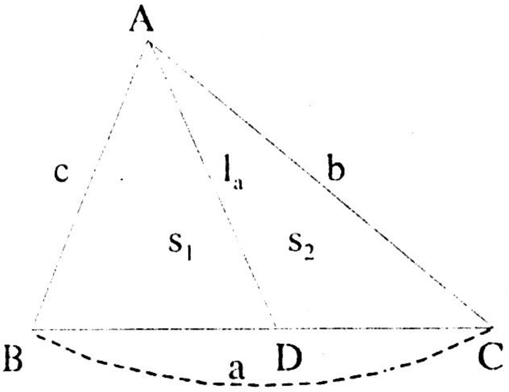
$\Leftrightarrow\ 2S=\ell_a^2\ (b+c)\sin\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow\ bc\sin A=\ell_a^2\ (b+c)\sin\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow\ 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\ell_a^2\ (b+c)\sin\frac{A}{2}$

$\Leftrightarrow\ 2bc.\cos\frac{A}{2}=\ell_a^2\ (b+c)$

$\Leftrightarrow\ \ell_a=\dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ (đpcm).



Hình 45

Thí dụ 2

Cho tam giác ABC có $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, $C=(x_C, y_C)$. Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh :

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A-x_B & x_A-x_C \\ y_A-y_B & y_A-y_C\end{matrix}\right\|$$

Áp dụng với $A=(1;-2)$, $B=(-2;3)$, $C=(0;4)$.

Lời giải

$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A\Leftrightarrow 4S^2=AB^2.AC^2.\sin^2A$

$\Leftrightarrow 4S^2=\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2(1-\cos^2A)$

$\Leftrightarrow 4S^2=\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2\cos^2A=\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2$ (1)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$, $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;y_C-y_A)$

Để đơn giản cách viết ta đặt $\begin{cases}x_1=x_B-x_A\\ y_1=y_B-y_A\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=x_C-x_A\\ y_2=y_C-y_A\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}^2=x_1^2+y_1^2$, $\overrightarrow{AC}^2=x_2^2+y_2^2$. Suy ra :

$\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$ (2)

$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2=(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) ta có

$4S^2=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-(x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2)$

$=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)^2$

$\Leftrightarrow 2S = | x_1 y_2 - x_2 y_1 |$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -y_2 & -y_2 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_A - x_B & x_A - x_C \\ y_A - y_B & y_A - y_C \end{Vmatrix} \qquad \text{(đpcm)}$$

- Với A = (1; −2), B=(−2; 3), C=(0; 4) ta có

$$S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1+2 & 1-0 \\ -2+2 & -2-6 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -8 \end{Vmatrix} = 12 \Leftrightarrow S = 12 \text{ (đvdt)}$$

Chú ý : Thông qua bài toán ta còn có : $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

Thí dụ 3

Chứng minh trong mọi tam giác ABC luôn có :

1) $a = b.\cos C + c.\cos B$ (*công thức hình chiếu thứ nhất*)

2) $\sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$

3) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 A$$

Lời giải

1) Theo định lý cosin ta có $\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases}$

Cộng theo từng vế ta có $0 = 2a^2 - 2a(c.\cos B + b.\cos C)$

$\Leftrightarrow a = b.\cos C + c.\cos B$ (đpcm) (1)

2) Từ định lý sin suy ra $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$ thay vào (1) có

$2R\sin A = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$ (2)

$\Leftrightarrow \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$. (đpcm) (3)

3) Khi B = C ta có $B = C = 90^0 - \frac{A}{2}$

- Đẳng thức (3) cho : $\sin 2B = 2\sin B\cos B$, $\sin 2C = 2\sin C\cos C$.
  Tương tự $\sin 2A = 2\sin A\cos A$. (đpcm)
- Đẳng thức (2) cho : $\sin A = \sin(90^0 - \frac{A}{2})\cos(90^0 - \frac{A}{2})$

$\Leftrightarrow \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

Tương tự $\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$, $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ (đpcm)

- Ta có $\sin 2A = 2\sin A\cos A \Leftrightarrow \sin^2 2A = 4\sin^2 A\cos^2 A$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 A = (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 4\sin^2 A\cos^2 A$

$\Leftrightarrow \cos^2 2A = (\cos^2 A - \sin^2 A)^2$

$\Rightarrow \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ (đpcm).

$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$ (đpcm)

$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ (đpcm)

Tương tự: $\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = 2\cos^2 B - 1 = 1 - 2\sin^2 B$

$\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = 2\cos^2 C - 1 = 1 - 2\sin^2 C$

Chú ý.

Từ kết quả bài toán trên suy ra với mọi $\alpha \in (0^0; 90^0)$ ta có :

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ (4)

Bằng cách thử trực tiếp thấy rằng các công thức trong (4) đúng cả khi $\alpha = 0^0$, $\alpha = 90^0$ nói khác đi với mọi $\alpha \in [0^0; 90^0]$ ta có :

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

Các công thức trên được gọi là *công thức góc nhân đôi.*

Chúng ta luôn sử dụng công thức này mà không phải chứng minh.

Thí dụ 4

Chứng minh trong mọi tam giác ABC luôn có :

$$\frac{\cos A}{c.\cos B + b.\cos C} + \frac{\cos B}{b.\cos A + a.\cos C} + \frac{\cos C}{a.\cos B + b.\cos A} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

Lời giải

Theo định lý cosin : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Leftrightarrow 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$. Thay $a = b.\cos C + c.\cos B$ vào mẫu thức ta có

$\dfrac{\cos A}{c.\cos B + b\cos C} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$. Tương tự có

$$\frac{\cos B}{b.\cos C + a.\cos C} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2abc}, \quad \frac{\cos C}{a.\cos B + b.\cos C} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}$$

Suy ra $\dfrac{\cos A}{c.\cos B + b.\cos C} + \dfrac{\cos B}{b.\cos C + a.\cos C} + \dfrac{\cos C}{a.\cos B + b.\cos A} =$

$$= \frac{(b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + c^2 - c^2)}{2abc} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \text{ (đpcm)}$$

Thí dụ 5

Chứng minh trong mọi tam giác ABC luôn có :

$$\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 0 \qquad (1)$$

Lời giải

Áp dụng định lý sin ta có :

$$a^2 - b^2 = 4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B) = 4R^2[(1 - \cos^2 A) + (1 - \cos^2 B)]$$

$$= 4R^2(\cos^2 B - \cos^2 A) = 4R^2(\cos B - \cos A)(\cos B + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 4R^2(\cos B - \cos A)$$

Tương tự $\dfrac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} = 4R^2(\cos C - \cos B)$, $\dfrac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 4R^2(\cos A - \cos C)$

Suy ra : $\dfrac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \dfrac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \dfrac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} =$

$$= 4R^2(\cos B - \cos A + \cos C - \cos B + \cos A - \cos C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Thí dụ 6

Gọi S là diện tích của một tam giác ABC nào đó, chứng minh :

1) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

2) $S = \dfrac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

3) $\cot gA = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Lời giải

1) Ta có $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ (1)

Từ định lý sin suy ra $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Thay vào (1) có $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$. (đpcm)

2) *Cách 1.*

Theo định lý sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Leftrightarrow a\sin B = b\sin A$

$\Leftrightarrow a^2\sin B\cos B = ab\sin A\cos B \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}a^2\sin 2B = \dfrac{1}{2}ab\sin A\cos B$ (2)

Tương tự $\dfrac{1}{4}b^2\sin 2A = \dfrac{1}{2}ab\sin B\cos A$ (3)

Cộng các kết quả (2) và (3) ta có

$$\frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A) = \frac{1}{2}ab(\sin A\cos B + \cos A\sin B) = \frac{1}{2}ab\sin(A + B)$$

$$= \frac{1}{2}ab\sin C = S \text{ (đpcm).}$$

Cách 2 : Gọi C' là điểm đối xứng của C qua trục AB. Gọi $H = AB \cap CC''$

Có hai trường hợp xảy ra đối với H : $H \in AB$ và $H \notin AB$

Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích tam giác BCC' và ACC'

Trường hợp 1: $H \in AB$ (h 46.1) Khi đó $2S = S_1 + S_2$ (1)

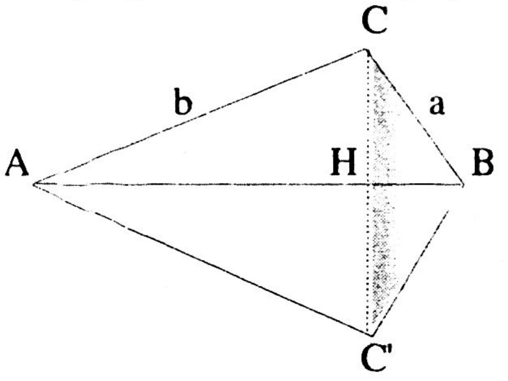
Rõ ràng $S_1 = \dfrac{1}{2}BC.BC'.\sin\widehat{CBC'} = \dfrac{1}{2}a^2\sin 2B$ (2)

$S_2 = AC.AC'.\sin\widehat{CAC'} = \frac{1}{2}b^2\sin 2A$ (3)

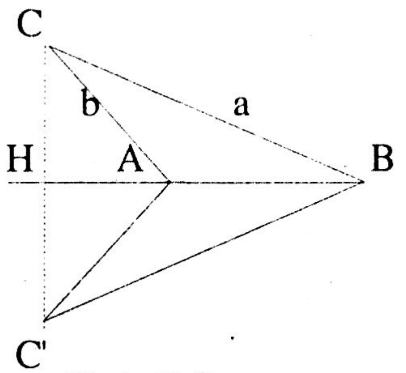
Cộng theo từng vế các kết quả (2) và (3) ta có : $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

$\Leftrightarrow 2S = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A) \Leftrightarrow S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$ (đpcm)

Trường hợp 2: $H \notin AB$, chẳng hạn A nằm giữa HB (h46.2) Khi đó $2S = S_1 - S_2$ (4)



Hình 46.1



Hình 46.2.

Rõ ràng $S_1 = \frac{1}{2}BC.BC'.\sin\widehat{CBC'} = \frac{1}{2}a^2\sin 2B$ (5)

$S_2 = \frac{1}{2}AC.AC'.\sin\widehat{CAC'} = \frac{1}{2}b^2\sin 2(180^0 - A)$

$= \frac{1}{2}b^2\sin(180^0 - A)\cos(180^0 - A) = \frac{1}{2}b^2\sin A(-\cos A) = -\frac{1}{2}b^2\sin 2A$ (6)

Cộng theo từng vế các kết quả (5) và (6) ta có: $S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

$\Leftrightarrow 2S = \frac{1}{2}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A) \Leftrightarrow S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$ (đpcm)

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có $S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

3) Theo định lý cosin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Leftrightarrow \frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$ (2)

Từ định lý sin suy ra a=2RsinA, thay vào (2) có

$$\frac{\cos A}{2R\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc} \Leftrightarrow \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

Tương tự : $\text{cotg}B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\text{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Lời bình 1

Trong mọi tam giác luôn có :

$$\text{cotg}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S},\ \text{cotg}B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S},\ \text{cotg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}\quad (3)$$

Đó là kết quả mà thí dụ trên đưa lại. Người ta gọi đó là *định lí côtang*

Định lí này có hiệu lực khá rộng và làm đơn giản lời giải nhiều bài toán về tam giác lượng. Chúng ta còn gặp lại nó nhiều lần sau này.

Lời bình 2.

Cộng theo từng vế các đẳng thức trong (3) dẫn tới trong mọi tam giác luôn có

$$\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Thí dụ 7

Cho tam giác ABC có : $2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$. Chứng minh :

α) $2\text{cotg}B=\text{cotg}A+\text{cotg}C$. (1)

β) $B\le 60^0$

Lời giải

α) Theo định lý côtang ta có:

$$\text{cotg}A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S},\ \text{cotg}B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S},\ \text{cotg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}\ \text{nên}$$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}=2\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$$

$\Leftrightarrow 2b^2=2(a^2+c^2-b^2)\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$ (2)

Từ định lý sin suy ra $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$. $c=2R\sin C$, thay vào (2) có

$(2)\Leftrightarrow 2(2R\sin B)^2=(2R\sin A)^2+(2R\sin C)^2\Leftrightarrow 2\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ (đpcm)

β) Theo định lý côsin ta có $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (3)

Thay (2) vào (3) có $\cos B=\dfrac{b^2}{2ac}\ge\dfrac{b^2}{a^2+c^2}$.

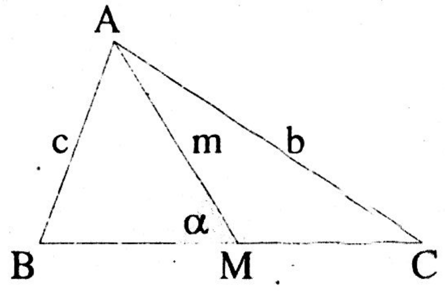
Theo (2) $\dfrac{b^2}{a^2+c^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\cos B\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow B\le 60^0$ (đpcm)

Thí dụ 8 (Đ62)

Trong tam giác ABC có B > C. Gọi α là góc nhọn tạo bởi trung tuyến AM với cạnh BC. Chứng minh rằng : $2\text{cotg}\alpha=\text{cotg}C-\text{cotg}B$

Lời giải

Gọi diện tích tam giác ABC là S, suy ra diện tích các tam giác MAB, MAC đều bằng $\frac{S}{2}$. Gọi độ dài các đoạn thẳng BM, CA, AB, AM theo thứ tự lần lượt là x, b, c, m. Ta có



Hình 47

$\widehat{AMC} = 180^0 - \alpha$.

Theo định lý côtang ta có : $\mathrm{cotg}C = \dfrac{b^2 + (2x)^2 - c^2}{4S}$,

$$\mathrm{cotg}B = \frac{c^2 + (2x)^2 - b^2}{4S}$$

Bởi thế $\mathrm{cotg}C - \mathrm{cotg}B = \dfrac{b^2 + (2x)^2 - c^2}{4S} - \dfrac{c^2 + (2x)^2 - b^2}{4S} = \dfrac{b^2 - c^2}{2S}$ (1)

Trong tam giác AMB có $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{m^2 + x^2 - c^2}{2S}$,

Trong tam giác AMC có $\mathrm{cotg}(180^0 - \alpha) = \dfrac{m^2 + x^2 - b^2}{2S}$

Trừ theo từng vế có

$\mathrm{cotg}\alpha - \mathrm{cotg}(180^0 - \alpha) = \dfrac{m^2 + x^2 - c^2}{2S} - \dfrac{m^2 + x^2 - b^2}{2S} \Leftrightarrow 2\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{b^2 - c^2}{2S}$ (2)

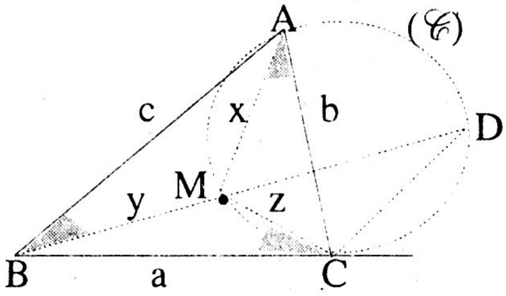
So sánh (1) và (2) ta có $2\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{cotg}C - \mathrm{cotg}B$ (đpcm)

Thí dụ 9 *(Điểm Broca)*

1) Dựng điểm M trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{MCB} = \widehat{MBA}$

2) Gọi $\varphi = \widehat{MAC}$. Chứng minh $\mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}A + \mathrm{cotg}B + \mathrm{cotg}C$

Lời giải



Hình 48

1) - Dựng đường tròn (𝒞) qua A tiếp xúc với đường thẳng BC tại C.

- Kẻ dây cung CD của đường tròn (𝒞): CD//AB

- Nối B với D, lấy M = BD∩(𝒞).

M chính là điểm cần dựng, tức là $\widehat{MAC} = \widehat{MCB} = \widehat{MBA}$

Thật vậy :

$\widehat{MAC} = \widehat{MDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MB) (1)

$\widehat{MCB} = \widehat{MDC}$ (góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến cùng trương một cung) (2)

$\widehat{MBA} = \widehat{MDC}$ (so le trong) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MCB} = \widehat{MBA}$ (cùng bằng ∠MDB) (đpcm)

2) Gọi độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB, MA, MB, MC theo thứ tự là a, b, c, x, y, z. Gọi diện tích các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB theo thứ tự là S, s_A, s_B, s_C.

Cách 1 : Theo định lý côtang, trong tam giác MBC ta có :

$$\mathrm{cotg}\varphi = \mathrm{cotg}\widehat{MCB} = \frac{a^2 + z^2 - y^2}{4s_A} \Rightarrow 4s_A\,\mathrm{cotg}\varphi = a^2 + z^2 - y^2$$

Tương tự : trong tam giác MAC ta có : $4s_B\text{cotg}\varphi = b^2 + x^2 - z^2$,

trong tam giác MBA ta có : $4s_C\text{cotg}\varphi = c^2 + y^2 - x^2$,

Cộng theo từng vế các kết quả trên có : $4(s_A + s_B + s_C)\text{cotg}\varphi = a^2 + b^2 + c^2$ (4)

Rõ ràng $s_A + s_B + s_C = S$ nên (4) ⇔ $4S\text{cotg}\varphi = a^2 + b^2 + c^2$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}\varphi = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S} \Leftrightarrow \text{cotg}\varphi = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

$\Leftrightarrow \text{cotg}\varphi = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$ (đpcm)

Cách 2 :

- Trong tam giác MBC, theo định lý sin ta có :

$$\frac{MC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin M} \Leftrightarrow \frac{MB}{\sin(B-\varphi)} = \frac{BC}{\sin M} \qquad (5)$$

Để ý : $\angle BMC = 180^0 - (\angle MBC + \angle MCB) = 180^0 - (\angle MBC + \angle MBA) = 180^0 - B$

$$\text{Nên (5)} \Leftrightarrow \frac{MC}{\sin(B-\varphi)} = \frac{BC}{\sin(180^0 - B)} \Leftrightarrow \frac{MC}{\sin(B-\varphi)} = \frac{BC}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow MC = \frac{BC\sin(B-\varphi)}{\sin B} \qquad (6)$$

- Trong tam giác MCA, theo định lý sin ta có $\dfrac{MC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin M}$

$$\Leftrightarrow \frac{MC}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\sin M} \qquad (7)$$

Để ý : $\angle CMA = 180^0 - (\angle MAC + \angle MCA) = 180^0 - (\angle MCB + \angle MCB) = 180^0 - C$

$$\text{Nên (7)} \Leftrightarrow \frac{MC}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\sin(180^0 - C)} \Leftrightarrow \frac{MC}{\sin\varphi} = \frac{AC}{\sin C} \Leftrightarrow MC = \frac{AC\sin\varphi}{\sin C} \qquad (8)$$

o sánh (7) và (8) ta có $\dfrac{BC\sin(B-\varphi)}{\sin B} = \dfrac{AC\sin\varphi}{\sin C}$ (9)

- Trong tam giác ABC, theo định lý sin ta có $BC = 2R\sin A$, $AC = 2\sin B$

Thay vào (9) có $\dfrac{2R\sin A.\sin(B-\varphi)}{\sin B} = \dfrac{2R\sin B.\sin\varphi}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{2R\sin A.\sin(B-\varphi)}{\sin B} = \frac{2R\sin B.\sin\varphi}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin A.\sin(B-\varphi)}{\sin B} = \frac{\sin B.\sin\varphi}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(B-\varphi)}{\sin B\sin\varphi} = \frac{\sin B}{\sin A\sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin(B-\varphi)}{\sin B\sin\varphi} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\cos\varphi - \cos B\sin\varphi)}{\sin B\sin\varphi} = \frac{\sin A\cos C + \cos A\sin C}{\sin A\sin C}$$

$\Leftrightarrow \text{cotg}\varphi - \text{cotg}B = \text{cotg}C + \text{cotg}A \Leftrightarrow \text{cotg}\varphi = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$ (đpcm)

Chú ý : Điểm M trong tam giác có tính chất $\angle MAC = \angle MCB = \angle MBA$ có tên là *điểm Broca*. Góc $\varphi = \angle MAC = \angle MCB = \angle MBA$ được gọi là *góc Broca*

Lời bình 1.

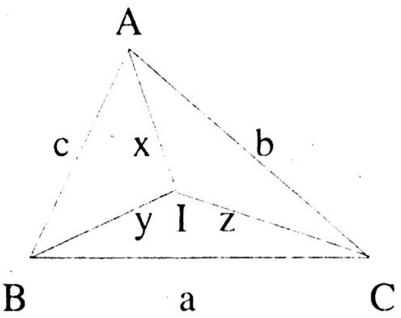
- Sự có mặt của tổng cotgA + cotgB + cotgC gợi ta liên tưởng tới định lý côtang làm nảy sinh cách giải thứ nhất.
- Giữa các tam giác MAC, MCB, MBA đôi một cùng có cạnh chung và cùng có một góc bằng φ. Nhận xét ấy nảy sinh dùng một cạnh chung (chẳng hạn như đã sử dụng cạnh MC) làm mối liên kết các yếu tố trong hai tam giác ấy. Điều đó giải thích cách giải thứ hai và vai trò của định lý sin.

Thí dụ 10 (Đ125)

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=0$$

Lời giải



Hình 49

Gọi I, r theo thứ tự là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi độ dài các đoạn thẳng BC, CA, AB, IA, IB, IC theo thứ tự là a, b, c, x, y, z. Gọi diện tích các tam giác ABC, IBC, ICA, IAB theo thứ tự là S, s_A, s_B, s_C.

Cách 1 : (*Sử dụng định lý côtang*)

Ta có $4s_A=2ar$, $4s_B=2br$, $4s_C=2cr$.

Theo định lý côtang, trong tam giác IBC ta có :

$$\text{cotg}\frac{C}{2}=\frac{a^2+z^2-y^2}{4s_A} \Leftrightarrow 4s_A\text{cotg}\frac{C}{2}=a^2+z^2-y^2 \Leftrightarrow 2ar.\text{cotg}\frac{C}{2}=a^2+z^2-y^2 \quad (1)$$

Tương tự trong tam giác ICA ta có : $2br.\text{cotg}\frac{C}{2}=b^2+z^2-x^2$ (2)

Trừ theo từng vế các kết quả (1) và (2) ta có

$$2ar.\text{cotg}\frac{C}{2}-2br.\text{cotg}\frac{C}{2}=(a^2+z^2-y^2)-(b^2+z^2-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}=a^2-b^2+x^2-y^2 \quad (3)$$

Tương tự $2r(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}=b^2-c^2+y^2-z^2$ (4)

$$2r(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=c^2-a^2+z^2-x^2 \quad (5)$$

Cộng theo từng vế các kết quả (1) và (2) ta có

$$2r[(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}]=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\text{cotg}\frac{C}{2}+(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2}+(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2}=0 \text{ (đpcm)}$$

Cách 2 : Gọi H là hình chiếu của I trên BC ta có IH = r và

$A = BC = BH + HC = r\text{cotg}\frac{B}{2}+r\text{cotg}\frac{C}{2}$. Tóm lại $a=r\text{cotg}\frac{B}{2}+r\text{cotg}\frac{C}{2}$.

Tương tự $b = r\text{cotg}\frac{A}{2} + r\text{cotg}\frac{C}{2}$. Bởi thế : $a - b = r(\text{cotg}\frac{B}{2} - \text{cotg}\frac{A}{2})$

$$\Rightarrow (a-b)\text{cotg}\frac{C}{2} = r(\text{cotg}\frac{C}{2}\text{cotg}\frac{B}{2} - \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}) \qquad (6)$$

Tương tự $(b-c)\text{cotg}\frac{A}{2} = r(\text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{C}{2} - \text{cotg}\frac{A}{2}\text{cotg}\frac{B}{2}) \qquad (7)$

$$(c-a)\text{cotg}\frac{B}{2} = r(\text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{A}{2} - \text{cotg}\frac{B}{2}\text{cotg}\frac{C}{2}) \qquad (8)$$

Cộng theo từng vế các kết quả trong (6), (7), (8) ta có

$$(a-b)\text{cotg}\frac{C}{2} + (b-c)\,\text{cotg}\frac{A}{2} + (c-a)\text{cotg}\frac{B}{2} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý : Công thức $a = r\text{cotg}\frac{B}{2} + r\text{cotg}\frac{C}{2}$ được gọi là *công thức hình chiếu thứ hai.*

Thí dụ 11 (Đ128)

Cho ABCD là tứ giác nội tiếp với các cạnh AB = a, BC = b, CD = c, DA= d. Chứng minh rằng : $\text{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$

Lời giải

Tứ giác ABCD nội tiếp $\Leftrightarrow$ $A + C = 180^0 \Rightarrow \cos A + \cos C = 0$

Áp dụng định lý côsin lần lượt vào các tam giác BCD, BAD ta có

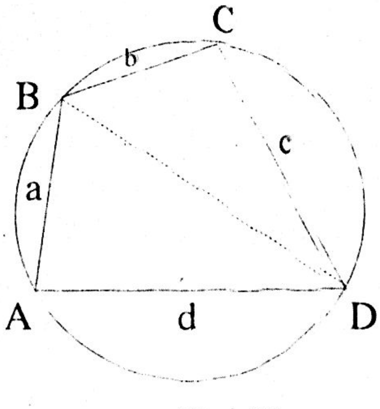
$$\begin{cases} BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc.\cos A \\ BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad.\cos A \end{cases}$$

Trừ theo từng vế ta có $0 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A - (a^2 + d^2 - 2ad\cos A)$

$$\Leftrightarrow 2(bc + ad)\cos A = a^2 + c^2 - b^2 - d^2$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{2(ad + bc)} \qquad (*)$$

Kí hiệu $2p = a + b + c + d$, từ (*) suy ra :



Hình 50

- $1 - \cos A = 1 - \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$

$$= \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad + bc)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(b + c - a + d)(b + c + a - d)}{2(ad + bc)} = \frac{2(p-d)(p-a)}{2(ad + bc)}$$

- $1 + \cos A = 1 + \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \dfrac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad + bc)}$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2(p-b)(p-c)}{2(ad + bc)} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\text{tg}^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}$ (3)

Do $0<\dfrac{A}{2}<\pi\Rightarrow \text{tg}\dfrac{A}{2}>0$ nên (3) $\Leftrightarrow \text{tg}\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$ (đpcm)

Thí dụ 12

Cho tam giác ABC, BC = a, CA = b, AB = c. BE, CF là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng :

$$BE\perp CF \Leftrightarrow \text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$

Lời giải

Gọi $G = BE\cap CF$. Ta có $BE\perp CF \Leftrightarrow BC^2 = BG^2 + CG^2$

$\Leftrightarrow a^2=\left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2 \Leftrightarrow 9a^2=4m_b^2+4m_c^2$

$\Leftrightarrow 9a^2=[2(c^2+a^2)-b^2]+[2(b^2+a^2)-c^2]$

$\Leftrightarrow 5a^2=b^2+c^2$ (1)

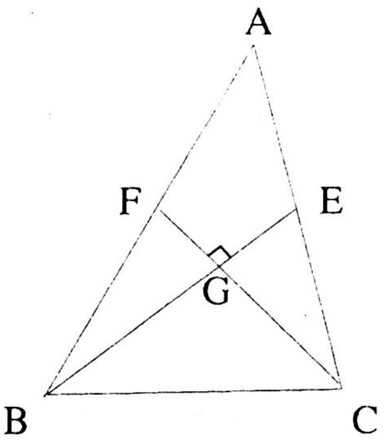
Theo định lý côtang ta có cotgA=2(cotgB+cotgC)

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}=2\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}\right)$

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=4a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2=5a^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE\perp CF$

$\Leftrightarrow$ cotgA= 2(cotgB + cotgC) (đpcm).



Hình 51

Lời bình

Kết quả bài toán còn dẫn tới

$$BE\perp CF \Leftrightarrow 5a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow \text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

Thí dụ 13

Tam giác ABC có $a^4 = b^4 + c^4$. (1)

Chứng minh ABC là tam giác nhọn và $2\sin^2A = \text{tg}B\,\text{tg}C$ (2)

Lời giải

Từ (1) $\Rightarrow a^4 > b^4$ và $a^4 > c^4 \Rightarrow a > b$ và $a > c \Rightarrow A > B$ và $A > C$. Do vậy để chứng minh ΔABC là tam giác nhọn, ta chỉ cần chứng minh $A < 90^0$

- Ta có (1) $\Leftrightarrow (b^2+c^2)^2-a^4=2b^2c^2 \Leftrightarrow (b^2+c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2)=2b^2c^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow \cos A=\dfrac{bc}{a^2+b^2+c^2}>0$

$\Leftrightarrow A < 90^0$ (đpcm).

- Lại có (1) $\Leftrightarrow a^4-(b^2-c^2)^2=2b^2c^2 \Leftrightarrow (a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=2b^2c^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{bc}{2S}\right)^2$ (2)

Theo định lý côtang ta có (2) $\Leftrightarrow \text{cotg}B.\text{cotg}C=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{bc\sin A}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\text{tgB}}\cdot\frac{1}{\text{tgC}}=\frac{1}{2\sin^2 A} \Leftrightarrow \text{tgB.tgC}=2\sin^2 A \quad \text{(đpcm)}$$

Thí dụ 14

Chứng minh trong mọi tam giác luôn có : $m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq 3\sqrt{3}\,S$

Lời giải

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$$4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=(2b^2+2c^2-a^2)+(2c^2+2a^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)$$

$$\Leftrightarrow 4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)=3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{3} \qquad (1)$$

Theo công thức Hêrông : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow S \leq \sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}=\sqrt{p\left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3}=\sqrt{\frac{p^4}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4.\sqrt{3}}$. Tóm lại $S \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4.\sqrt{3}} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$ (2)

Dấu đẳng thức trong (1) và (2) đồng thời có khi $a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Từ (1), (2) suy ra : $S \leq \dfrac{4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{4.3\sqrt{3}} \Leftrightarrow m_a^2+m_b^2+m_c^2 \geq 3\sqrt{3}\,S$,

dấu đẳng thức có khi ΔABC đều (đpcm).

Lời bình

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski $3(a^4+b^4+c^4) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 16..3.S^2$

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4 \geq 16S^2$

Vậy trong mọi tam giác ABC luôn có :

- $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$
- $a^4+b^4+c^4 \geq 16.S^2$

Thí dụ 15

Cho tam giác ABC. BC = a, CA = b, BA = c. Gọi p là nửa chu vi.

Chứng minh :

1) $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \dfrac{1}{8}abc.$

2) $\dfrac{1}{a+b-c}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{b+c-a} \geq \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

Lời giải

1) Do $(p-a)>0, (p-b)>0, (p-c)>0$ nên theo bất đẳng thức Côsi :

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)}{2}=\frac{2p-a-b}{2}=\frac{c}{2}$$

Tương tự $\sqrt{(p-c)(p-a)} \le \frac{b}{2}$, $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{a}{2}$

Suy ra $\sqrt{(p-a)(p-b)}.\sqrt{(p-c)(p-a)}.\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{1}{8}abc$

dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

2) Ta có $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a} \ge \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \ge \frac{3\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}.$$

- Theo bất đẳng thức Svacxơ

$$\frac{1^2}{p-c} + \frac{1^2}{p-b} + \frac{1^2}{p-a} \ge \frac{(1+1+1)^2}{p-a+p-b+p-c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \ge \frac{9}{p} \qquad (1)$$

- Theo bất đẳng thức Côsi

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p} \ge 4\sqrt[4]{\frac{3}{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{S^2}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{p} \ge \frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \ge \frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \ge \frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{S}} \Leftrightarrow \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \ge \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt{S}} \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức trong (1) và (2) đồng thời có khivà chỉ khi $a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Lời bình

1) Bạn đọc chắc chắn đặt câu hỏi tại sao xét $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{3}{p}$ và sự phân tích $\frac{3}{p} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{p}$?

Trả lời :

Thấp thoáng trong $\frac{x}{\sqrt{S}} = \sqrt[4]{\frac{x^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ làm ta nghĩ tới đó là vế phải của bất đẳng thức Côsi có vế trái chứa bốn số $\frac{\alpha}{p-a}, \frac{\alpha}{p-b}, \frac{\alpha}{p-c}, \frac{\beta}{p}$.

Với mọi α, β ∈R ta có $\alpha\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)+\frac{\beta}{p}\geq 4\sqrt[4]{\frac{\alpha^3\beta}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{\alpha}{p-a}=\frac{\alpha}{p-b}=\frac{\alpha}{p-c}=\frac{\beta}{p}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ \frac{\alpha}{p-a}=\frac{\beta}{p}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ \frac{2\alpha}{a}=\frac{2\beta}{3a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\ \beta=3\alpha\end{cases}$. Chọn α = 1 ta có β = 3.

Và kết nối với (1) dẫn ta đến sự phân tích $\frac{3}{p}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{p}$.

2) Bạn cũng có kết quả (1) bằng cách sử dụng bất đẳng thức Côsi :

$$[(p-a)+(p-b)+(p-c)]\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)\geq 9$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-a}\geq\frac{9}{p}$$

Thí dụ 16

Cho tam giác ABC. Chứng minh : $\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $S=pr=\frac{abc}{4R}\Rightarrow S^2=\frac{rpabc}{4R}\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{rpabc}{4R}$ (1)

Theo Thí dụ 15 : $(p-a)(p-b)(p-c)\leq\frac{1}{8}abc$ suy ra (1) ⇔ $\frac{rpabc}{4R}\leq\frac{1}{8}pabc$

$\Leftrightarrow\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = b = c ⇔ ΔABC là tam giác đều.

Lời bình : Bạn cũng có thể biến đổi :

$$(1)\Leftrightarrow\frac{r}{R}=\frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc}\quad(2)$$

Theo Thí dụ 14 : Trong tam giác ABC luôn có :

$$abc\geq(a+b-c)(a-b+c)(c+b-a)\quad(*)$$

Do vậy từ (2) suy ra $\frac{r}{R}\leq\frac{abc}{2abc}=\frac{1}{2}$ hay $\frac{r}{R}\leq\frac{1}{2}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi a = b = c ⇔ ΔABC là tam giác đều.

Thí dụ 17

Chứng minh trong mọi tam giác luôn có : $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Lời giải

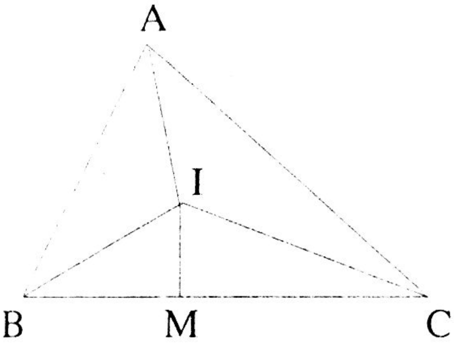
Cách 1 : Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M là hình chiếu của I trên BC. Ta có $r = IM = IB\sin\frac{B}{2}$. (1)

Trong tam giác IBC theo định lý sin ta có

$$\frac{IB}{\sin\widehat{ICB}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} \Leftrightarrow \frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BIC}}$$

$$\Leftrightarrow IB\sin\angle BIC = BC\sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Rõ ràng $\angle BIC=180^0-\frac{B+C}{2}=180^0-\frac{B+C}{2}$



Hình 52

$\Rightarrow \sin\angle BIC=\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$. Do vậy (2) $\Leftrightarrow IB\cos\frac{A}{2}=BC\sin\frac{C}{2}$

$$\Leftrightarrow IB\cos\frac{A}{2}=2R\sin A\sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow IB\cos\frac{A}{2}=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow IB = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$. Thay vào (1) có $r= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (đpcm)

Cách 2 : Theo công thức hình chiếu thứ hai (*xem Thí dụ 9*)

$$a = r\left(\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\right) \Leftrightarrow a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r\left(\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin A\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r\sin\frac{B+C}{2} \Leftrightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r\cos\frac{A}{2}$$

$\Leftrightarrow r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (đpcm)

Lời bình

Từ hai thí dụ 15 và 16 suy ra trong tam giác ABC luôn có :

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

Thí dụ 18

Chứng minh trong mọi tam giác luôn có

1) $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$ 2) $h_a+ h_a+ h_a \ge 9r$

Lời giải

1) Ta có $2S = ah_a \Leftrightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$, Tương tự $\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$, $\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$

Lại có $S = pr \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{2p}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

Tóm lại $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ (đpcm)

2) Ta có $\frac{1}{r}$ $(h_a + h_a + h_a) = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)(h_a + h_a + h_a)$

Theo bất đẳng thức Côsi

$$\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)(h_a + h_a + h_a) \geq 3.\frac{3}{\sqrt[3]{h_a h_b h_c}} \cdot 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c} = 9$$

Vậy $\frac{1}{r}(h_a + h_a + h_a) \geq 9 \Leftrightarrow h_a + h_a + h_a \geq 9r$ (đpcm)

Thí dụ 19

Cho tam giác ABC có $A \geq B \geq C$. Chứng minh rằng

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} \qquad (1)$$

Lời giải

Theo giả thiết $A \geq B \geq C \Leftrightarrow a \geq b \geq c \Rightarrow a - b > 0, a - c > 0, b - c > 0$ (2)

Ta có $2S = ah_a = bh_b \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$, Bởi thế (1) $\Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b \geq a^2c + b^2a + c^2b$

$\Leftrightarrow (b^2c - a^2c) + (a^2b - b^2a) + (c^2a - c^2b) \geq 0$

$\Leftrightarrow c(b^2 - a^2) + ab(a - b) + c^2(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)[ab + c^2 - c(a + b)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)[ab - ac) + (c^2 - bc)] \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)[a(b - c) + c(c - b)] \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(a - c) \geq 0.$ (3)

Bởi có (2) nên (3) đúng. Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 20

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng : $r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c$

Lời giải

Ta có $r_a + r_b + r_c = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c}$ (1)

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c} \qquad (2)$$

Tương tự $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{b}$. $\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}$

Suy ra $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a}+\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c} \geq \frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2s}{c} = h_a + h_b + h_c \qquad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra $r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c$ (đpcm)

Chú ý :

Bạn đọc có thể chứng tỏ kết quả (2) bằng các cách sử dụng bất đẳng thức quen thuộc : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ *(với mọi x, y dương)*

Việc chứng minh bất đẳng thức này đơn giản. Bạn cũng có thể nói nó là bất đẳng thức Svacxơ cho 4 số : 1, 1, x, y.

Thí dụ 21

Cho tam giác ABC, S là diện tích. Chứng minh :

a) Ba trung tuyến m_a, m_b, m_c là độ dài của một tam giác và có diện tích bằng $\frac{3}{4}S$.

b) $S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$

Lời giải

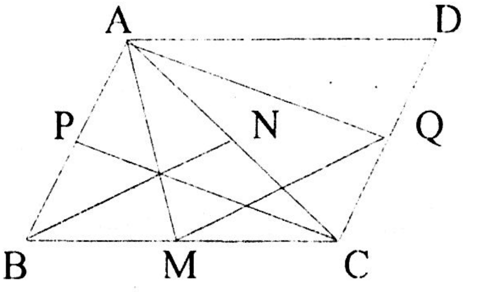
a) Dựng hình bình hành ABCD.

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB, CD.

Rõ ràng MQ = BN, AQ = CP.

Vậy tam giác AMQ có độ dài ba cạnh bằng m_a, m_b, m_c.

Gọi diện tích các tam giác AMQ, ABM, ADQ, MCQ theo thứ tự là S_m, S_B, S_D, S_C.



Hình 53

Dễ thấy $S_B = S_D = \frac{S}{2}$, $S_C = S_{\Delta MPC} = \frac{S}{4}$. Rõ ràng

$S_n + S_B + S_D + Sc = 2S \Leftrightarrow S_m + \frac{S}{2}+\frac{S}{2}+\frac{S}{4} = 2S \Leftrightarrow S_m = S - \frac{S}{4} \Leftrightarrow S_m = \frac{3}{4}S$ (đpcm)

b) Áp dụng công thức Hêrông cho tam giác AMQ ta có

$$S_n = \frac{1}{4}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

(đpcm)

Nhận xét : Bạn còn thấy độ dài các trung tuyến của tam giác AMQ tương ứng là : $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$, $\frac{3}{4}c$. *Bạn sẽ thấy sự vận dụng nhận xét này trong thí dụ dưới đây.*

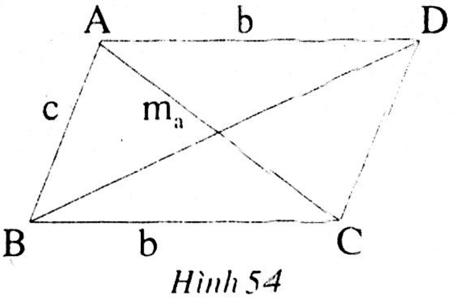
Thí dụ 22

Chứng minh trong mọi tam giác ABC luôn có :

$$\frac{9}{20}(ab+bc+ca) < m_am_b + m_bm_c + m_cm_a < \frac{5}{4}(ab+bc+ca)$$

Lời giải

- Chứng minh $m_am_b + m_bm_c + m_cm_a < \frac{5}{4}(ab+bc+ca)$ (1)



Hình 54

Rõ ràng $b + c > 2m_a$.

Tương tự $c + a > 2m_b$,

$a + b > 2m_c$

Cộng theo từng vế các kết quả trên ta có

$a + b + c > m_a + m_b + m_c$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 > (m_a+m_b+m_c)^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) >$

$> m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$

$\Leftrightarrow 2(m_am_b+m_bm_c+m_cm_a) < a^2+b^2+c^2-(m_a^2+m_b^2+m_c^2)+2(ab+bc+ca)$ (2)

Ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-(m_a^2+m_b^2+m_c^2) = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$ (3)

Theo định lý côsin : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos A \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$.

Tương tự $b^2 > a^2 + c^2 - 2ac$, $c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$.

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) < \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$ (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra $2(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a) < \frac{1}{2}(ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow m_am_b + m_bm_c + m_cm_a < \frac{5}{4}(ab+bc+ca)$ (đpcm)

- $\frac{9}{20}(ab+bc+ca) < m_am_b + m_bm_c + m_cm_a$ (5)

Theo Thí dụ 20 thì tồn tại tam giác A'B'C' có ba cạnh là $a'=m_a$, $b'=m_b$, $c'=m_c$ và các trung tuyến lần lượt là $m_a' = \frac{3}{4}a$, $m_b' = \frac{3}{4}b$, $m_c' = \frac{3}{4}c$.

Áp dụng kết quả (1) ta có $m_a'm_b' + m_b'm_c' + m_c'm_a' < \frac{5}{4}(a'b' + b'c' + c'a')$

$\Leftrightarrow \frac{9}{16}(ab+bc+ca) < \frac{5}{4}(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$

$\Leftrightarrow \frac{9}{20}(ab+bc+ca) < m_am_b + m_bm_c + m_cm_a$ (đpcm).

Thí dụ 23

Chứng minh trong mọi tam giác ABC luôn có :

1) $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge 2\sqrt{3}$

2) $\frac{m_a}{\sin A} + \frac{m_b}{\sin B} + \frac{m_c}{\sin C} \ge 3R\sqrt{3}$

Lời giải

1) Ta có $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow 4m_a^2 + 3a^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$. Theo bất đẳng thức Côsi:

$4m_a^2 + 3a^2 \ge 4a.m_a\sqrt{3} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 2a.m_a\sqrt{3}$ (1)

hay (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{m_a} \ge \frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2}$. (1')

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $4m_a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 2(b^2+c^2) - a^2 = 3a^2$ $\Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$

Tương tự $\frac{b}{m_a} \ge \frac{2\sqrt{3}b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{c}{m_a} \ge \frac{2\sqrt{3}c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (2)

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trong (1') và (2) ta có

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge \frac{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 2\sqrt{3} \text{ (dpcm).}$$

$$\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge \frac{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 2\sqrt{3} \text{ (dpcm)}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} b^2+c^2 = 2a^2 \\ c^2+a^2 = 2b^2 \\ a^2+b^2 = 2c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

2) Ta có (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4R\sin A.m_a\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{m_a}{\sin A} \ge \frac{4R\sqrt{3}m_a^2}{a^2+b^2+c^2}$ (3)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $4m_a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow 2(b^2+c^2) - a^2 = 3a^2$ $\Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$

Tương tự $\frac{m_b}{\sin B} \ge \frac{4R\sqrt{3}m_b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{m_c}{\sin C} \ge \frac{4R\sqrt{3}m_c^2}{a^2+b^2+c^2}$ (4)

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trong (3) và (4) có

$$\frac{m_a}{\sin A} + \frac{m_b}{\sin B} + \frac{m_c}{\sin C} \ge \frac{4R\sqrt{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{a^2+b^2+c^2} \quad (5)$$

Mặt khác $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \frac{4(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{4}$

thay vào (3) ta có $\frac{m_a}{\sin A}+\frac{m_b}{\sin B}+\frac{m_c}{\sin C}\geq 3R\sqrt{3}$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

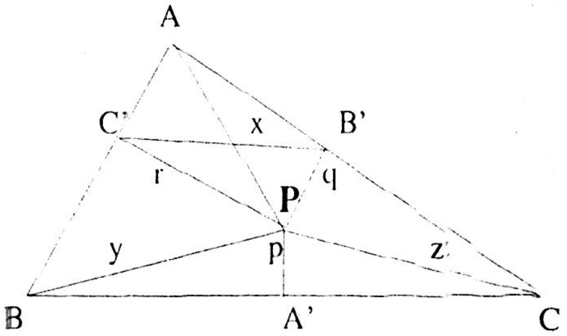
Thí dụ 24

Giả sử P là một điểm bất kỳ trong ΔABC. Ký hiệu $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ và p, q, r theo thứ tự lần lượt là độ dài các khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\min Q = 2$ với $Q=\frac{x+y+z}{p+q+r}$

Lời giải

Cách 1 (Định lý cosin)

Trong mặt phẳng ΔABC, từ P kẻ $PC'\perp AB$, $PA'\perp BC$ và $PB'\perp CA$.



Nối B'C'.Do $\angle AB'P = \angle AC'P = 90^0$

$\Rightarrow$ AB'PC' là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $AP = x$.

Áp dụng định lý hàm số sin vào $\Delta AB'C'$ ta có : $B'C' = x\sin A$

Lại áp dụng định lý hàm số cosin vào $\Delta PB'C'$ ta có :

$B'C'^2 = PC'^2 + PB'^2 - 2PC'.PB'\cos\angle N'C'PF$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2+q^2-2r.q\cos A$ (do$\angle B'AC'+\angle B'PC'=180^0$)

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2+q^2-2r.q\cos(B+C)$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2+q^2-2r.q(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = r^2(\cos^2 B+\sin^2 B)+q^2(\cos^2 C+\sin^2 C)-2r.q(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$

$\Leftrightarrow B'C'^2 = (r\sin B+q\sin C)^2+(r\cos B-q\cos C)^2 \geq (r\sin B+q\sin C)^2$

$\Rightarrow B'C' \geq r\sin B+q\sin C$. Hay $x\sin A \geq r\sin B + q\sin C \Rightarrow x \geq r\frac{\sin B}{\sin A}+r\frac{\sin C}{\sin A}$

Tương tự ta cũng có $y \geq p\frac{\sin C}{\sin B}+r\frac{\sin A}{\sin B}$; $z \geq q\frac{\sin A}{\sin C}+r\frac{\sin C}{\sin A}$

Từ đó ta có

$$x+y+z \geq p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+q\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)+r\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right) \qquad (*)$$

Trong ΔABC ta có $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, $\sin C > 0$. Do vậy

Theo Cô si $\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\geq 2$, $\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\geq 2$, $\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\geq 2$

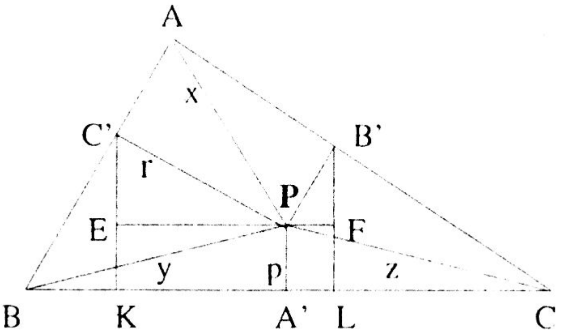
Nên từ (*) $\Rightarrow x + y + z \geq 2(p + q + r)$. (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} r\cos B - q\cos C = 0 \\ \sin A = \sin B = \sin C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Cách 2 : Từ C', B' hạ các đường thẳng vuông góc với BC. Gọi F, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của P lần lượt trên C'K, B'L. Sẽ có

$\angle PC'E = \angle ABC, PB'F = \angle ACB$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)



Hình 56

Từ đó $\begin{cases} PE = PC'\sin C' = r\sin B \\ PF = PB'\sin B' = q\sin C \end{cases}$

$\Rightarrow$ PE+PF= rsinB+ qsinC $\Leftrightarrow$ EF = rsinB + qsinC.

Hiển nhiên ta có B'C' ≥ EF= rsinB+ qsinC Hay xsinA ≥ rsinB + qsinC

$\Leftrightarrow x \ge r\dfrac{\sin B}{\sin A} + q\dfrac{\sin C}{\sin A}$. Đến đây, tiếp nối như cách 1

Chú ý *Từ kết quả bài toán (giữ nguyên kí hiệu x, y, z, p, q, r) ta có :* $x + y + z \ge 2(p + q + r)$. *Đó là bất đẳng thức Ecđôtsơ*

Thí dụ 25

Cho tam giác ABC và x, y, z là các số thực không đồng thời bằng không.

Chứng minh $Q=\dfrac{xy\cos C + yz\cos A + zx\cos B}{x^2+y^2+z^2}$ có GTLN bằng $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Gọi I là một điểm bất kỳ trong miền tam giác ABC.

Đặt các vectơ $\overrightarrow{IA_1} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{IX} = x\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_1}$ có phương vuông góc với BC

Đặt các vectơ $\overrightarrow{IB_1} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{IY} = y\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_2}$ có phương vuông góc với CAĐặt các vectơ $\overrightarrow{IC_1} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{IZ} = z\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_3}$ có phương vuông góc với AB

Ta có $\left(\overrightarrow{IX}+\overrightarrow{IY}+\overrightarrow{IZ}\right)^2 \ge \vec{0}$

$\Leftrightarrow (x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3})^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+ y^2+z^2+2xy\cos(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})+$

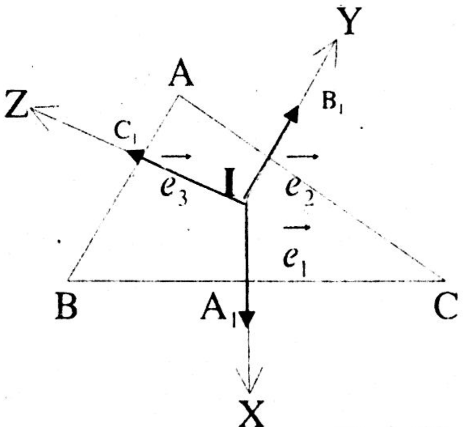
$+2yz\cos(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})+2zx\cos(\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_1}) \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A$

$-2zx\cos B \ge 0 \qquad (1)$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy\cos C + 2yz\cos A$

$+2zx\cos B \qquad (2)$



Hình 57

Theo giả thiết $x^2+ y^2+ z^2>0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \frac{xy\cos C + yx\cos A + zx\cos B}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow Q \le \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Dấu đẳng thức:

$(1) \Leftrightarrow x^2(\sin^2B + \cos^2B) + y^2(\sin^2A + \cos^2A) + z^2$

$+ 2xy\cos(A + B) - 2yz\cos A - 2zx\cos B \ge 0$

$$\Leftrightarrow x^2\sin^2B + x^2\cos^2B + y^2\sin^2A + y^2\cos^2B + z^2 + 2xy(\cos A\cos B - \sin A\sin B) - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2\sin^2B - 2xy\sin A\sin B + y^2\sin^2A) + (x^2\cos^2B + y^2\cos^2B + z^2 + 2xy\cos A\cos B - 2yz\cos A - 2zx\cos B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x\sin B - y\sin A)^2 + (x\cos B + y\cos A - z^2)^2 \geq 0$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $(*)\begin{cases} x\sin B - y\sin A = 0 & (4) \\ x\cos B + y\cos A - z = 0 & (5) \end{cases}$

Ta có (4) $\Leftrightarrow y = \dfrac{x\sin B}{\sin A}$, thế vào (5) có $x\cos B + \dfrac{x\sin B\cos A}{\sin A} = z$

$\Leftrightarrow x\sin(A + B) = z\sin A \Leftrightarrow x\sin C = z\sin A$

Do vậy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x\sin B = y\sin A \\ x\sin C = z\sin A \end{cases}$ Hay $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$ (6)

Từ (3) và (6) kết luận $Q = \dfrac{1}{2}$ là GTLN của Q (đpcm)

- **Lời bình.**

1) Khi $x=y=z=1$ ta có: $\dfrac{\cos C + \cos A + \cos B}{3} \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\sin A : \sin B : \sin C = 1:1:1 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

2) Với tam giác đặc biệt, nhiều khi người ta ghi trực tiếp các giá trị $\cos A=\alpha$, $\cos B=\beta$, $\cos C=\gamma$ cho bất đẳng thức (2) hiện hữu dưới dạng

$$2\alpha xy + 2\beta yz + 2\gamma zx \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Chẳng hạn : Chứng minh $\dfrac{\sqrt{2}}{x} + \dfrac{\sqrt{3}}{y} - \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{z} \leq x^2 + y^2 + z^2$

trong đó x, y, z là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + a = 0$ $(a \neq 0)$

Bạn cần biết rằng $\sqrt{2} = 2\cos 45^0$; $\sqrt{3} = 2\cos 30^0$; $-\sqrt{2+\sqrt{3}} = 2\cos 105^0$

Vậy áp dụng (2) cho ΔABC với $A=45^0$. $B=30^0$ với lưu ý $xyz=1$, kết quả đến một cách tự nhiên.

3) Khi $xyz>0$ ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\cos A}{x} + \frac{\cos B}{y} + \frac{\cos C}{z} \leq \frac{x}{2yz} + \frac{y}{2zx} + \frac{z}{2xy} \qquad (2')$$

hay thay x bởi $\dfrac{1}{x}$, y bởi $\dfrac{1}{y}$, z bởi $\dfrac{1}{z}$ ta có

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C \leq \frac{yz}{2x} + \frac{zx}{2y} + \frac{xy}{2z} \qquad (2'')$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x : y : z = \sin A : \sin B : \sin C$

4) Các bất đẳng thức (2), (2'), (2'') cho ta nhận dạng tam giác ABC nếu nó thoả mãn một trong các bất đẳng thức:

- $2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \geq x^2 + y^2 + z^2$

- $\dfrac{\cos A}{x}+\dfrac{\cos B}{y}+\dfrac{\cos C}{z}\geq\dfrac{x}{2yz}+\dfrac{y}{2zx}+\dfrac{z}{2xy}$
- $x\cos A+y\cos B+z\cos C\geq\dfrac{yz}{2x}+\dfrac{zx}{2y}+\dfrac{xy}{2z}$

Chẳng hạn:

Nhận dạng ΔABC, nếu nó thoả mãn một trong các bất đẳng thức sau:

a) $\dfrac{\cos A}{3}+\dfrac{\cos B}{4}+\dfrac{\cos C}{5}\geq\dfrac{5}{12}$ (7)

b) $\cos A+\cos B+\dfrac{\cos C}{\sqrt{3}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ *(8)*

Câu a). Theo (2') ta có $\dfrac{\cos A}{3}+\dfrac{\cos B}{4}+\dfrac{\cos C}{5}\leq\dfrac{3}{2.4.5}+\dfrac{4}{2.3.5}+\dfrac{5}{2.3.4}=\dfrac{5}{12}$

Suy ra (7) $\Leftrightarrow\dfrac{\cos A}{3}+\dfrac{\cos B}{4}+\dfrac{\cos C}{5}=\dfrac{5}{12}\Leftrightarrow\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$

$\Leftrightarrow a:b:c=3:4:5\Leftrightarrow\Delta ABC$ vuông tại C.

Câu b). Theo (2') với $x=y=1$, $z=\sqrt{3}$ ta có

$$\frac{\cos A}{1}+\frac{\cos B}{1}+\frac{\cos C}{\sqrt{3}}\leq\frac{1}{2.1.\sqrt{3}}+\frac{1}{2.1.\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2.1.1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Thí dụ 26 (Đ39)

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$ (1)

Lời giải

Thấy rằng cả hai vế của (1) đều dương nên bình phương hai vế ta có

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B}=\frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}\Leftrightarrow\frac{(1+\cos B)^2}{1-\cos^2 B}=\frac{(2a+c)^2}{(2a-c)(2a+c)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{1-\cos B}=\frac{2a+c}{2a-c}\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\frac{2a+c}{4a}\Leftrightarrow\cos B=\frac{c}{2a}\Leftrightarrow 2ac\cos B=c^2$$

$\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2=c^2\Leftrightarrow a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân tại C.

Thí dụ 27

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\dfrac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\dfrac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}\leq\dfrac{27r}{8S}$

Lời giải

Ta có $\dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}=\dfrac{1+\cos A}{2a}=\dfrac{2bc(1+\cos A)}{4abc}=\dfrac{2bc+2bc\cos A}{4abc}$

$$=\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{4abc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4abc}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4abc}$$

Tóm lại $\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}}{a}=\dfrac{(a+b+c)(b+c-a)}{4abc}$

Tương tự : $\dfrac{\cos^2\dfrac{B}{2}}{b}=\dfrac{(a+b+c)(a+c-b)}{4abc}$, $\dfrac{\cos^2\dfrac{C}{2}}{c}=\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{4abc}$

- Suy ra $\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}}{a}+\dfrac{\cos^2\dfrac{B}{2}}{b}+\dfrac{\cos^2\dfrac{C}{2}}{c}=\dfrac{(a+b+c)(b+c-a+a+c-b+a+b-c)}{4abc}$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{4abc}$$

- Lại có $\dfrac{27r}{8S}=\dfrac{27r}{8pr}=\dfrac{27}{4(a+b+c)}$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow\ \dfrac{(a+b+c)^2}{4abc}\le\dfrac{27}{4(a+b+c)}\ \Leftrightarrow\ (a+b+c)^3\le 27abc$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a+b+c}{3}\le\sqrt[3]{abc} \qquad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$ dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a=b=c$, bởi thế (2) $\Leftrightarrow\ \dfrac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}\ \Leftrightarrow\ a=b=c$

$\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều.

Thí dụ 28

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu :

$3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)\ge 15 \qquad (1)$

Lời giải

Ta có VT(1) $=3(\cos B+2\sin C)+4(\sin B+2\cos C)$

$$=(3\cos B+4\sin B)+2(3\sin C+4\cos C)$$

$$\le\sqrt{(3^2+4^2)(\sin^2 B+\cos^2 B)}+2\sqrt{(3^2+4^2)(\sin^2 C+\cos^2 C}$$

$\Rightarrow$ VT $\le\sqrt{(3^2+4^2)}+2\sqrt{(3^2+4^2)}=15$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{\cos B}{3}=\dfrac{\sin B}{4}\\[2mm] \dfrac{\sin C}{3}=\dfrac{\cos C}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}B=\dfrac{4}{3}\\[2mm] \text{tg}C=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{tg}B=\text{cotg}C\\ \dfrac{\sin C}{3}=\dfrac{\cos C}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B+C=90^0\\ \dfrac{\sin C}{3}=\dfrac{\sin B}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=90^0\\ \dfrac{c}{3}=\dfrac{b}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=90^0\\ a:b:c=5:4:3\end{cases}$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow$ VT(1) $=15$ $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác vuông có $a:b:c=5:4:3$

Thí dụ 29

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $r_a = r + r_b + r_c$.

Trong đó r, r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp cạnh a, cạnh b, cạnh c của tam giác ABC.

Lời giải

Ta có $S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p},\ r_a = \frac{S}{p-a},\ r_b = \frac{S}{p-b},\ r_c = \frac{S}{p-c}$$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow r_a - r = r_b + r_c \Leftrightarrow \dfrac{S}{p-a} - \dfrac{S}{p} = \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-b-c}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{a}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

$\Leftrightarrow p^2 - pa = p^2 - p(b+c) - bc \Leftrightarrow p(b+c-a) - bc = 0$

$\Leftrightarrow (b+c+a)(b+c-a) - 2bc = 0 \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 - 2bc = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

Thí dụ 30

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : (*) $\begin{cases} a = 2b\cos C & (1) \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow a^2 = 2ab\cos C \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$ (3)

Ta có (2) $\Leftrightarrow a^2(a - b - c) = a^3 - b^3 - c^3 \Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 + c^2 - bc) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \cos A = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0.$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ A = 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Thí dụ 31

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : (*) $\begin{cases} \sin B\cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{4} & (1) \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$

Lời giải

- Ta có (2) $\Leftrightarrow a^2(a - b - c) = a^3 - b^3 - c^3 \Leftrightarrow a^2(b + c) = b^3 + c^3$

$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)(b^2 + c^2 - bc) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0$. (3)

Từ (3) $\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(B + C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin B\cos C + \cos B\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (4)

- Từ (1) và (4) $\Rightarrow \sin B\cos C = \cos B\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{tg}B\,\text{cotg}C = 1 \Leftrightarrow \text{tg}B = \text{tg}C$

$\Leftrightarrow B = C$ (5)

- Từ (3) và (5) suy ra (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^0 \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Thí dụ 32

Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $p^2 \le h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a$ (1)

Lời giải

Ta có $2S = ah_a = bh_b \Rightarrow 4S^2 = abh_ah_b \Leftrightarrow 4p(p - a)(p - b)(p - c) = abh_ah_b$

Theo kết quả Thí dụ 14§3 ta có $4p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{1}{8}abc$

$\Rightarrow abh_ah_b \le \frac{1}{8}pabc \Leftrightarrow h_ah_b \le \frac{1}{2}pc$. Tương tự $h_bh_c \le \frac{1}{2}pa$, $h_ch_a \le \frac{1}{2}pb$

Suy ra VP(1) $\le \frac{1}{2}pc + \frac{1}{2}pa + \frac{1}{2}pb = \frac{1}{2}p(c + a + b) = p^2$. Dấu đẳng thức trong tất cả các đánh giá trên đồng thời có khi và chỉ khi $p - a = p - b = p - c$.

Do vậy (1) $\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

1) $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2} + \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2} + \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2} = 0$

2) $bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0$

3) $2abc(\cos A + \cos B) = (a + b)(c + b - a)(c + a - b)$

4) $abc(\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c)$

Bài 2. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S và tâm đường tròn nội tiếp là I. Chứng minh $2S : IA^2\sin A + IB^2\sin B + IC^2\sin C$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến xuất phát từ B và C vuông góc với nhau. Chứng minh $\cos A \ge \frac{4}{5}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh: $2\text{cotg}A = \text{cotg}B + \text{cotg}C$.

Bài 5. Cho tam giác nhọn ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân ba đường cao và H là trực tâm. Gọi p_1 là nửa chu vi tam giác $A_1B_1C_1$. Gọi S, R theo thứ tự là diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

1) Chứng minh $S = pR$. Kết quả còn đúng không nếu tam giác có một góc tù.

2) Chứng minh $S_{\Delta HA_1B_1} = R^2\sin 2C\cos A\cos B\cos C$.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD có góc giữa AC và BD bằng α. Gọi S là diện tích của nó. Chứng minh : $S = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

Bài 7. Cho tam giác ABC và M là một điểm trên cạnh BC. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABM và ACM bằng nhau. Chứng minh $AM^2 = S\cot g\frac{A}{2}$

Bài 8. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu :

a) $S \geq \frac{2}{3}R^3(\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C)$ b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

c) $3b^2 + 3c^2 - a^2 \geq 4S\sqrt{3}$

Bài 9. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu :

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$$

Bài 10. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $l_a\sqrt{3} + \frac{a}{2} \geq b+c$

Bài 11. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin A}{\sin B\cos C} = 2 \\ a^2 = \dfrac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Bài 12. Tam giác ABC không có góc tù. Gọi H là trực tâm của nó. Chứng minh $(HA + HB + HC)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$

Bài 13 Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1) $S^2 = r.r_a.r_b.r_c$

2) $p^2 = r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a$

3) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$

Bài 14. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $r_a + r_b + r_c \leq 9r$

Bài 15. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu : $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{18R}{ab + bc + ca}$

Bài 16. Cho tam giác ABC. Chứng minh :

1) $p^2 \geq l_ar_a + l_br_b + l_cr_c$

2) $m_a.m_b.m_c \geq S.p \geq l_a.l_b.l_c$.

3) $\sqrt{3}(a + b + c) \geq 2(l_a + l_b + l_c)$

Bài 17. Cho tam giác ABC. Chứng minh :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

Bài 18. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r = 1$, độ dài các đường cao là các số nguyên. Chứng minh ΔABC là tam giác đều.

HƯỚNG DẪN – VẮN TẮT GIẢI

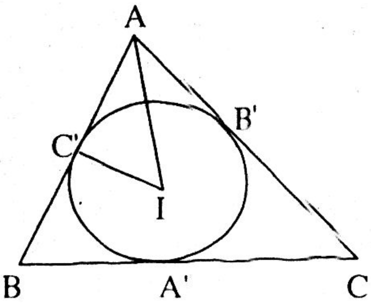
Bài 1. *Hướng dẫn* :

Câu 1: Thay $a = 2R\sin A$, dẫn tới Thí dụ 9 :

$$(a-b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2} + (b-c)\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + (c-a)\operatorname{cotg}\frac{B}{2} = 0.$$

Câu 2, 3, 4 : Dùng định lý côsin chuyển về đẳng thức đại số.

Bài 2. Gọi A', B' C' theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với cạnh của tam giác ABC. Ta có $AC' = IA\cos\frac{A}{2}$



Hình 58

$$\Rightarrow 2AC'.IA.\sin\frac{A}{2} = 2IA^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

hay $2S_{\Delta IAC'} = IA^2\sin A$.

Tương tự $2S_{\Delta IBA'} = IB^2\sin B$, $2S_{\Delta ICB'} = IC^2\sin C$.

Cộng các kết quả ấy, với lưu ý :

$2S_{\Delta IAC'} + 2S_{\Delta IBA'} + 2S_{\Delta ICB'} = S_{\Delta ABC}$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3. Theo lời bình sau Thí dụ 12§1 chương II có :

Hai trung tuyến BE và CF vuông góc với nhau $\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 4a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4a^2}{2bc} \text{ hay } \cos A = \frac{4a^2}{2bc} \geq \frac{4a^2}{b^2+c^2} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5} \text{ (đpcm)}$$

Bài 4.

Ta có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2} \Leftrightarrow 2a^2(c^2-b^2) = c^4 - b^4.$ (1)

Theo giả thiết $\frac{c}{b} \neq 1 \Leftrightarrow c \neq b$ do vậy (1) $\Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2$ (2)

Từ định lý cotang ta có : $2\operatorname{cotg}A = \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$

$$\Leftrightarrow \frac{2(b^2+c^2-a^2)}{4S} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} \Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. *Hướng dẫn* (h 59) :

1) Kí hiệu S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích các tam giác HBC, HCA, HAB.

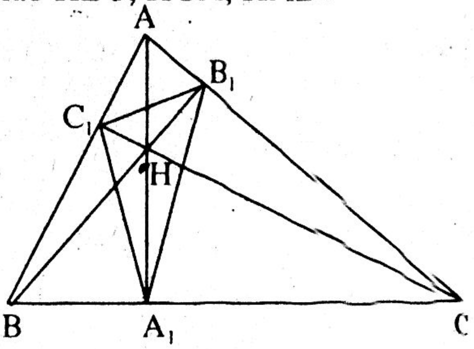
- Áp dụng định lý hàm số sin vào tam giác AB_1C_1 nội tiếp đường tròn đường kính AH ta có $B_1C_1 = AH\sin A \Rightarrow 2R.\ B_1C_1 = AH.a$.

Do ΔABC là tam giác nhọn nên H nằm giữa AA_1 (*) $\Rightarrow$ 2R.

$B_1C_1 = a(AA_1 - HA_1) = 2(S - S_a)$

hay $R.\ B_1C_1 = S - S_a$.

Tương tự $R.C_1A_1 = S - S_b$, $R.A_1B_1 = S - S_c$



Hình 59

Cộng các kết quả trên có $2p_1R = 3S - (S_a + S_b + S_c)$

$\Leftrightarrow p_1R = S$ (đpcm)

- Nếu tam giác có một góc tù thì nhận xét (*) không còn đúng nữa

$\Rightarrow$ Kết quả bài toán không còn đúng nữa.

2) Ta có $HA_1 = CA_1 \text{cotg}\angle A_1HC = AC\cos C\,\text{cotg}B = 2R\sin B\cos C\,\text{cotg}B = 2R\cos B\cos C$.

Tương tự $HB_1 = 2R\cos A\cos C$

$\Rightarrow 2S_{\Delta HA_1B_1} = HA_1.HB_1\sin\angle A_1HB_1 = (2R\cos B\cos C)(2R\cos A\cos C)\sin C$

$\Leftrightarrow S_{\Delta HA_1B_1} = R^2\sin 2C\cos A\cos B\cos C$ (đpcm)

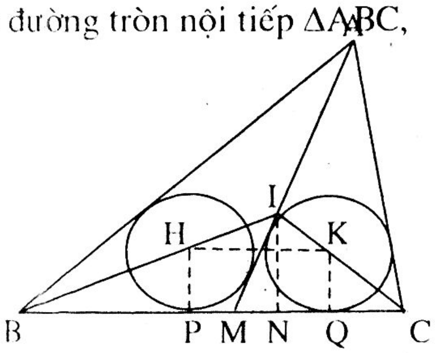
Bài 6. *Hướng dẫn* : (lưu ý $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$)

Ta có $2S_{\Delta OAB} = OA.OB\sin\alpha$. Tương tự và cộng các kết quả lại suy ra đpcm.

Bài 7. *Hướng dẫn* (h60):

Gọi I, H, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABM, ACM và N, P, Q là hình chiếu của chúng trên BC.

Kí hiệu x=AM, p là nửa chu vi ΔABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC, r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABM, ΔACM. Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM}$



Hình 60

$\Rightarrow pr = (b + x + BM)r_1 + (c + x + CM)r_1$

$\Rightarrow pr = (a + b + c + 2x)r_1 \Rightarrow pr = (p + x)r_1$

$$\Rightarrow \frac{p}{p+x} = \frac{r_1}{r} \qquad (1)$$

Mặt khác, theo định lý Talet ta có

$$\begin{cases} \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{BP}{BN} = \dfrac{c+BM-x}{2BN} \\ \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{CB}{CN} = \dfrac{b+CM-x}{2CN} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{p-x}{a} \text{ (tính chất của tỉ lệ thức)} \qquad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{p}{p+x} = \frac{p-x}{a} \Rightarrow pa = p^2 - x^2 \Rightarrow x^2 = p(p-a) = S\cdot\frac{p-a}{r} = S.\text{cotg}\frac{A}{2}$$

(đpcm)

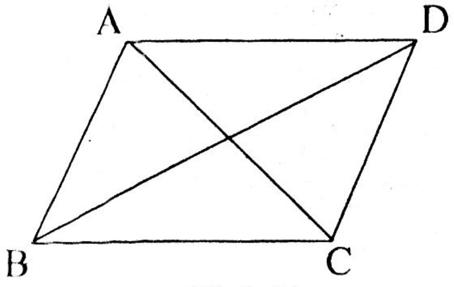
Bài 8. *Hướng dẫn*:

a) $S \geq \dfrac{2}{3}R^3(\sin^3A + \sin^3B + \sin^3C) \Leftrightarrow \dfrac{abc}{4R} \geq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3.4R^3} \Leftrightarrow abc \geq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

$\Rightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ΔABC đều.

b) Xem Thí dụ 14§1 chương II.

c) Dựng hình bình hành ABCD. (h61)



Hình 61

Theo kết quả câu b) ta có

$4\sqrt{3}\,S_{\Delta ABD} \leq BD^2 + BA^2 + AD^2 = b^2 + c^2 + 4m_a^2$

$= b^2 + c^2 + 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 + 3c^2 - a^2$

Rõ ràng $4\sqrt{3}\,S = 4\sqrt{3}\,S_{\Delta ABD} \leq 3b^2 + 3c^2 - a^2$ (đpcm)

Bài 9. *Hướng dẫn* :

Với mọi a, b > 0 ta có $(a + b)(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Tương tự $b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2$, $c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2$

Cộng các bất đẳng thức ấy ta có điều phải chứng minh.

Bài 10. Ta có $l_a = \frac{2\sqrt{bc}.\sqrt{p(p-a)}}{b+c} \le \sqrt{p(p-a)}$

$$\Rightarrow l\sqrt{3} \le \sqrt{3p(p-a)} \le \frac{p+3(p-a)}{2} = \frac{4p-4a}{2} = b+c-\frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2}+l\sqrt{3} \le b+c.$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\begin{cases} b=c \\ p=3(p-a) \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bởi thế $\frac{a}{2} + l\sqrt{3} \ge b+c \Leftrightarrow \frac{a}{2} + l\sqrt{3} = b+c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 11. *Hướng dẫn* : Xem thí dụ 31§1 Chương II

- Ta có $\frac{\sin A}{\sin B\cos C} = 2 \Rightarrow \sin A = 2\sin B\cos C$

$\Leftrightarrow \sin B\cos C + \cos B\sin C = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \cos B\sin C = \sin B\cos C$

$\Leftrightarrow \text{tg}B = \text{tg}C \Leftrightarrow B = C$ (1)

- $a^2 = \frac{a^3-b^3-c^3}{a-b-c} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 12

Trường hợp 1: ΔABC là tam giác vuông. Chẳng hạn $A = 90^0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$.

Khi đó $H \equiv A \Leftrightarrow \begin{cases} AH = 0 \\ BH = c \\ CH = b \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$(b+c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \le a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow 2bc \le b^2 + c^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 \ge 0 \Rightarrow$ đpcm.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại A.

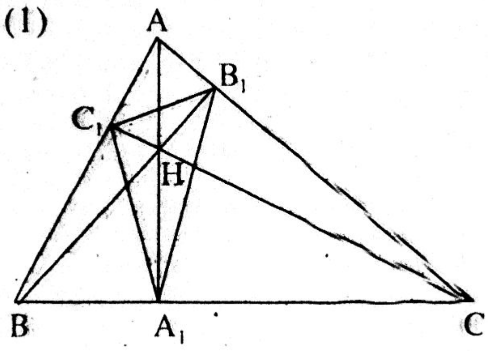
Trường hợp 2: (h62). ΔABC là tam giác nhọn $\Rightarrow$ trực tâm H thuộc miền trong của ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 là chân của các đường cao trên BC, CA, AB.

Trong tứ giác nội tiếp AB_1HC_1 ta có $2AH.AA_1 = 2AC_1.AB = 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

Tóm lại $2AH.AA_1 = b^2 + c^2 - a^2$

Tương tự $2BH.BB_1 = c^2 + a^2 - b^2$, $2CH.CC_1 = a^2 + b^2 - c^2$

$\Rightarrow 2(AH.AA_1 + BH.BB_1 + CH.CC_1) = a^2 + b^2 + c^2$ (1)



Hình 62

Kí hiệu S_a, S_b, S_c theo thứ tự là diện tích các tam giác HBC, HCA, HAB.

Ta có $1 - \frac{AH}{AA_1} = \frac{HA_1}{AA_1} = \frac{S_a}{S}$.

Tóm lại : $1 - \frac{AH}{AA_1} = \frac{S_a}{S}$.

Tương tự $1 - \frac{BH}{BB_1} = \frac{S_b}{S}$, $1 - \frac{CH}{CC_1} = \frac{S_c}{S}$.

$$\Rightarrow 3-\left(\frac{AH}{AA_1}+\frac{BH}{BB_1}+\frac{CH}{CC_1}\right)=\frac{S_a+S_b+S_c}{S}=1 \Leftrightarrow \frac{AH}{AA_1}+\frac{BH}{BB_1}+\frac{CH}{CC_1}=2 \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) có :

$$a^2+b^2+c^2=\left(\frac{AH}{AA_1}+\frac{BH}{BB_1}+\frac{CH}{CC_1}\right)(AH.AA_1+BH.BB_1+CH.CC_1) \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho 6 số : $x_1=\sqrt{\frac{AH}{AA_1}}$, $x_2=\sqrt{\frac{BH}{BB_1}}$,

$x_3=\sqrt{\frac{CH}{CC_1}}$, $y_1=\sqrt{AH.AA_1}$, $y_2=\sqrt{BH.BB_1}$, $y_3=\sqrt{CH.CC_1}$ ta có

$VT(3)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2=(AH+BH+CH)^2$

Vậy $a^2+b^2+c^2\geq(AH+BH+CH)^2$ (đpcm).

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{AH}{AA_1}=\frac{BH}{BB_1}=\frac{CH}{CC_1}\Leftrightarrow S_a=S_b=S_c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 13

1) Ta có $r.r_a.r_b.r_c=\frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}=\frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^4}{S^2}=S^2$

Tóm lại $r.r_a.r_b.r_c=S^2$ (đpcm)

2) Ta có $r_a.r_b+r_b.r_c+r_c.r_a=\frac{S}{p-a}\cdot\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c}+\frac{S}{p-c}\cdot\frac{S}{p-a}$

$$=S^2\left(\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}\right)$$

$$=S^2\frac{p-c+p-a+p-b}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^2p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{S^2p^2}{S^2}=p^2.\ \text{(đpcm)}$$

3) Ta có $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$ (đpcm)

Bài 14. Theo kết quả bài tập 13 : $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$

$$\Rightarrow (r_a+r_b+r_c)\frac{1}{r}=(r_a+r_b+r_c)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\geq 3\sqrt[3]{r_a.r_b.r_c}\,.3\sqrt[3]{\frac{1}{r_a.r_b.r_c}}=9$$

$\Rightarrow r_a+r_b+r_c\geq 9r$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $r_a=r_b=r_c\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bởi vậy $r_a+r_b+r_c\leq 9r \Leftrightarrow r_a+r_b+r_c=9r \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 15. Ta có $\frac{18R}{ab+bc+ca}=\frac{18R}{abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\frac{9}{2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$ (do $\frac{abc}{R}=4S$)

Theo kết quả bài tập 13 ta có : $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}=\frac{p}{S}=\frac{a+b+c}{2S}$

Bởi thế $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{18R}{ab+bc+ca} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{2S}=\frac{9}{2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$ (1)

Theo bất đẳng thức Cô–si : VT(1) ≥ 9, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $a = b = c$

Do đó (1) $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 16.

1) Ta có : $r_a=\frac{S}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$.

lại có $l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)} \Rightarrow l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ (1)

$r_a l_a \leq \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}=p\sqrt{(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow r_a l_a \leq p\cdot\frac{p-b+p-c}{2}=\frac{pa}{2}$ (2)

Tóm lại $r_a l_a \leq \frac{pa}{2}$. (3)

Dấu đẳng thức trong cả hai lần đánh giá (1) và (2) có khi và chỉ khi b=c.

Tương tự $r_b l_b \leq \frac{pb}{2}$, $r_c l_c \leq \frac{pc}{2}$. (4)

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức (3) và (4) ta có đpcm. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi trong (2), (3), (4) có dấu đẳng thức $\Leftrightarrow a = b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

2) • Ta có $4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2=(b^2+c^2)+(b^2+c^2)-a^2 \geq b^2+c^2+2bc-a^2=(b-c)^2-a^2$

$\Rightarrow 4m_a^2 \geq (b+c+a)(b+c-a)=4p(p-a)$. Tóm lại $m_a^2 \geq p(p-a)$ (5)

Tương tự $m_b^2 \geq p(p-b)$, $m_c^2 \geq p(p-c)$ (6)

Từ (5), (6) suy ra $m_a^2 m_b^2 m_c^2 \geq p^2 p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2S^2 \Rightarrow m_a m_b m_c \geq pS$ (đpcm)

Bất đẳng thức cân bằng ⇔ Các bất đẳng thức trong (5),(6) cân bằng

⇔ $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

• Theo (1) : $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$. Tương tự $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$, $l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$

$\Rightarrow l_a l_b l_c \leq p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pS$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có ⇔ ΔABC là tam giác đều.

3) Theo (1): $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$, $l_b \leq \sqrt{p(p-b)}$,$l_c \leq \sqrt{p(p-c)}$,

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có

$l_a+l_b+l_c \leq \sqrt{p}\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)$ (7)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski

$\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c} \leq \sqrt{3(3p-a-b-c)}=\sqrt{3p}$ (8)

Từ (7), (8) suy ra $l_a+l_b+l_c \le p\sqrt{3} \Leftrightarrow 2(l_a+l_b+l_c) \le \sqrt{3}(a+b+c)$ (đpcm)

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi các bất đẳng thức trong (7), (8) đồng thời cân bằng $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Bài 17. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ (1)

Ta có $a^2 - (b-c)^2 = (a+c-b)(a+b-c) = 4(p-b)(p-c)$

Tóm lại : $a^2-(b-c)^2=4(p-b)(p-c)$.

Tương tự : $b^2-(c-a)^2=4(p-c)(p-a)$, $c^2-(a-b)^2=4(p-a)(p-b)$.

Do vậy (1) $\Leftrightarrow (p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a) \ge S\sqrt{3}$ (2)

Đặt $x = p-a$, $y=p-b$, $z=p-c \Rightarrow x+y+z=3p-a-b-c=p$, suy ra $S=\sqrt{(x+y+z)xyz}$

Ta có (2) trở thành $xy+yz+zx \ge \sqrt{3xyz(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z) \Leftrightarrow (xy)^2+(yz)^2+(zx)^2 \ge xyz(x+y+z)$

$\Leftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \ge 0$ (đpcm).

Dấu đẳng thức có $\Leftrightarrow xy = yz = zx \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 18.

Rõ ràng $h_a > 2r = 2$ (do $r=1$). Do h_a nguyên $\Rightarrow h_a \ge 3 \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} \le \dfrac{1}{3}$

Tương tự $\dfrac{1}{h_b} \le \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{h_c} \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c} \le 1$. (9)

Mặt khác $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a+b+c}{2S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{p}{pr} = \dfrac{1}{r} = 1$ (10)

Từ (9), (10) $\Rightarrow \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c} = 1 \Leftrightarrow h_a=h_b=h_c(=3) \Rightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

$\Rightarrow$ (đpcm)

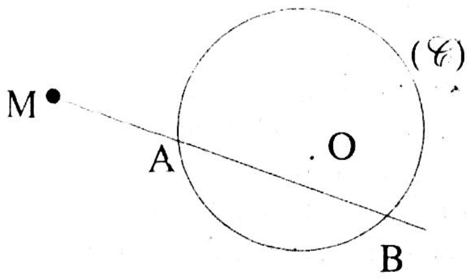
§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

- ***Định lý 1.***

Cho đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm O, bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng (Δ) thay đổi, luôn đi qua M, cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$.(const)



Hình 63

- ***Định nghĩa.***

Giá trị không đổi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ nói trong định lý trên được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn $(\mathcal{C})$. Kí hiệu $\mathcal{P}_{M/(\mathcal{C})}$

Như vậy : $\mathcal{P}_{M/(\mathcal{C})} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ $(d = MO)$

- *Chú ý :* Từ định nghĩa trên suy ra

M nằm ngoài đường tròn ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \mathcal{P}_{M/(\mathscr{C})}>0$

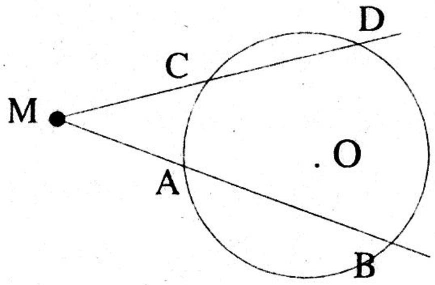
M nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \mathcal{P}_{M/(\mathscr{C})}=0$

M nằm trong đường tròn ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow \mathcal{P}_{M/(\mathscr{C})}<0$

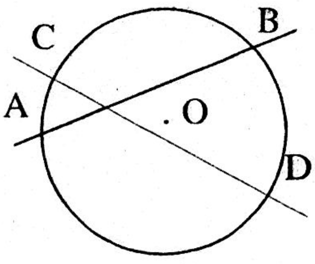
2. Điều kiện bốn điểm nằm trên một đường tròn

- ***Định lý 2***

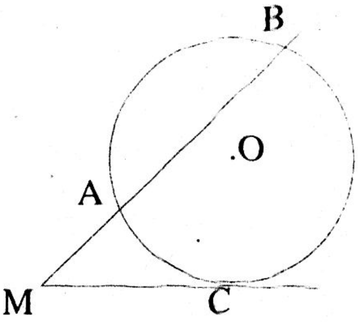
Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm M. A, B là hai điểm thuộc a và C, D là hai điểm thuộc a'. Cần và đủ để bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$



Hình 64.1



Hình 64.2



Hình 64.3

- ***Định lý 3***

Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm M, A, B là hai điểm thuộc a và C là một điểm thuộc a'. Cần và đủ để đường tròn qua ba điểm A, B, C tiếp xúc với a' tại C là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MC^2$.

3. Trục đẳng phương của hai đường tròn

- ***Định lý.***

Cho hai đường tròn không đồng tâm $(O_1; R_1)$ và $(O_1; R_1)$. Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn ấy là một đường thẳng.

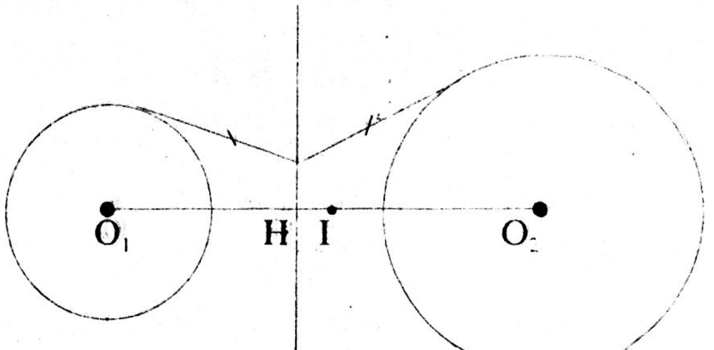
$$\mathcal{P}M/(O_1)=\mathcal{P}M/(O_2) \Leftrightarrow M\in(\Delta)\begin{cases}\Delta\perp O_1O_2\\ \Delta \text{ cắt } O_1O_2 \text{ tại } H: \overline{IH}=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2O_1O_2}\end{cases}$$

(Trong đó I là trung điểm đoạn thẳng O_1O_2)

- ***Định nghĩa.***

Đường thẳng có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn ấy. (h65)

Chú ý : Trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm.



Hình 65

4. Tâm đẳng phương

- ***Định lý.***

Ba trục đẳng phương của ba đường tròn có tâm không thẳng hàng đồng quy tại một điểm.

- ***Định nghĩa.***

Điểm có cùng phương tích với ba đường tròn có tâm không thẳng hàng (nói ở định lý trên) gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn ấy.

5. Cách dựng trục đẳng phương.

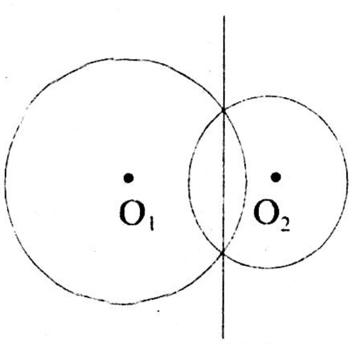
Cho hai đường tròn không đồng tâm (O_1) và (O_2)

* Nếu (O_1)và (O_2) cắt nhau thì trục đẳng phương là đường thẳng nối hai giao điểm. (h 66.1)

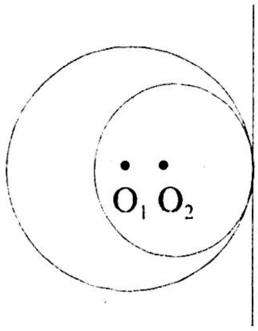
* Nếu (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm chung ấy. (h 66.2), (h 66.3)

* Nếu (O_1) và (O_2) không có điểm chung thì :

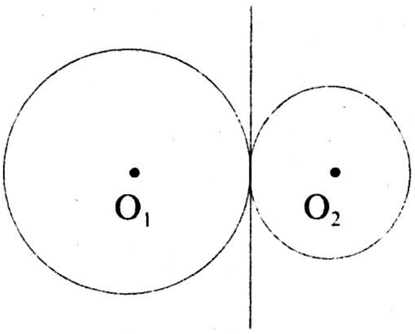
- Dựng đường tròn (O_3) cắt cả hai đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) không thẳng hàng với O_1 và O_2
- Dựng tâm đẳng phương I của (O_1), (O_2) và (O_3)
- Dựng đường thẳng (Δ) qua I vuông góc với O_1O_2. (Δ) là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). (h 66.4)



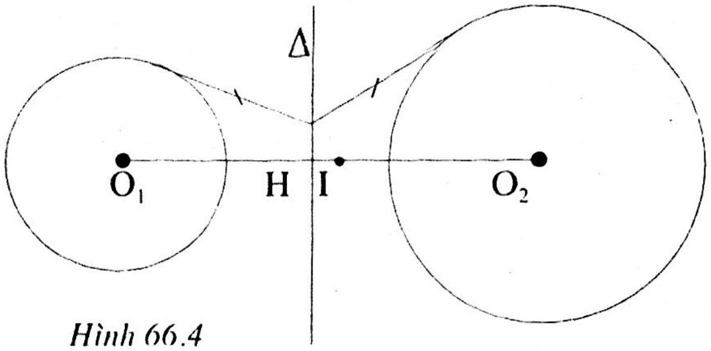
Hình 66.1



Hình 66..2



Hình 66..3



Hình 66.4

Chú ý : Hai đường tròn rời nhau, trục đẳng phương không có điểm chung với mỗi một đường tròn ấy.

II. CÁC THÍ DỤ

Thí dụ 1

Cho tam giác ABC, các đường cao AA', BB', CC'

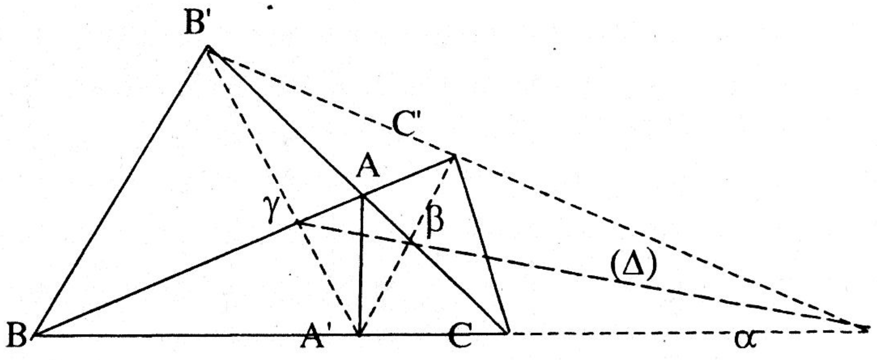
1) Gọi H là trực tâm. Chứng minh $\overline{HA}.\overline{HA'}=\overline{HB}.\overline{HB'}=\overline{HC}.\overline{HC'}$

2) Giả sử B'C' cắt BC tại α, C'A' cắt CA tại β, A'B' cắt AB tại γ.
Chứng minh α, β, γ thẳng hàng.

Lời giải

1) Ta có $\angle AB'B=\angle AA'B=90^0 \Rightarrow$ Bốn điểm ABA'B' cùng thuộc đường tròn đường kính AB) $\Rightarrow \overline{HA}.\overline{HA'}=\overline{HB}.\overline{HB'}$

Tương tự $\overline{HB}.\overline{HB'}=\overline{HC}.\overline{HC'}$ nên $\overline{HA}.\overline{HA'}=\overline{HB}.\overline{HB'}=\overline{HC}.\overline{HC'}$ (đpcm)



Hình 67

2) Gọi (Δ) là trục đẳng phương của hai đường trong (ABC) và (A'B'C').

Ta sẽ chứng minh cả ba điểm α, β, γ cùng thuộc (Δ). Thật vậy :

Bốn điểm ABA'B' cùng thuộc đường tròn nên $\overline{\gamma A}.\overline{\gamma B}=\overline{\gamma B'}.\overline{\gamma A'}$

hay $\mathcal{P}_{\gamma/(ABC)}=\mathcal{P}_{\gamma/(A'B'C')} \Leftrightarrow \gamma$ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (ABC) và (A'B'C').

Chứng minh tương tự ta có α, β cũng thuộc trục đẳng phương nói trên.

Vậy α, β, γ thẳng hàng. (đpcm)

Lời bình

Nhân đây nhắc lại mấy dấu hiệu ba điểm thẳng hàng :

- $AB+BC=AC \Leftrightarrow$ *B thuộc đoạn thẳng AC* $\Rightarrow$ *A, B, C thẳng hàng.*
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng.*
- $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng.*
- *Ba điểm A, B, C có cùng phương tích đối với hai đường tròn xác định* $\Leftrightarrow$ *A, B, C thẳng hàng.*

(• Toạ độ ba điểm A, B, C cùng thoả mãn một phương trình đường thẳng.)

Thí dụ 2

Cho tam giác ABC không cân, vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt AB tại E, cắt AC tại F, cắt nửa đường tròn (ABC) tại D.

Chứng minh AD, EF, BC đồng quy.

Lời giải

Trong tam giác AHB vuông tại H có $AH^2 = \overline{AE}.\overline{AB}$ (1)

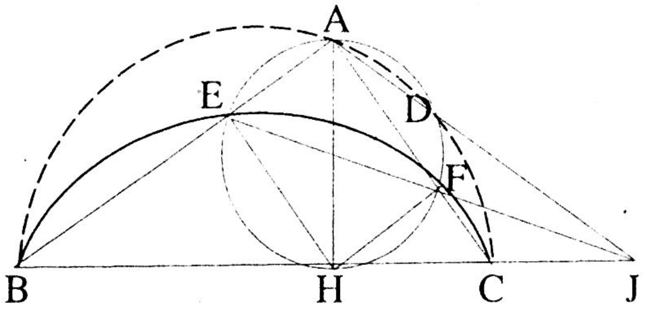
Trong tam giác AHC vuông tại H có $AH^2 = \overline{AF}.\overline{AC}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \overline{AE}.\overline{AB} = \overline{AF}.\overline{AC} \Rightarrow$ Tứ giác BEFC nội tiếp được đường tròn.

Kí hiệu $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$, theo thứ tự là đường tròn (ABC), đường tròn đường kính AH, đường tròn (BEFC).

Rõ ràng : $\begin{cases} \text{AD là trục đẳng phương của}(\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_2). \\ \text{EF là trục đẳng phương của } (\mathscr{C}_2), (\mathscr{C}_3). \\ \text{BC là trục đẳng phương của } (\mathscr{C}_1), (\mathscr{C}_3). \end{cases}$

Tam giác ABC không cân $\Rightarrow$ Ba đường tròn này có tâm không thẳng hàng nên các trục đẳng phương đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn ấy. Đó là điều phải chứng minh.



Hình 67

Thí dụ 2

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên AB lấy hai điểm P, P' đối xứng nhau qua O. M và M' là hai điểm nằm trên nửa đường tròn (O) sao cho PM//P'M'. Chứng minh : PM.P'M' có giá trị không đổi.

Lời giải

Gọi M_1 là điểm đối xứng của M' qua O.

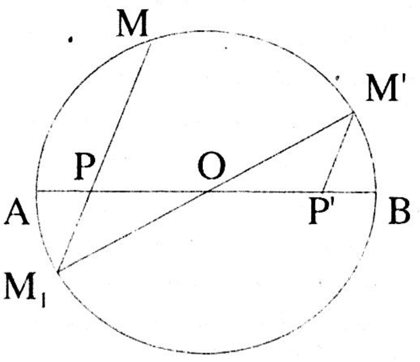
Rõ ràng $M' \in (O)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM'} \\ \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OP} = -(\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OP'})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P'M'} = -\overrightarrow{PM_1}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{P'M'} = -\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PM_1} = -\mathscr{P}_{M/(O)}$

$\Rightarrow PM.P'M' = |\mathscr{P}_{M/(O)}| = \text{const}$ (đpcm)



Hình 68

Thí dụ 3

Cho đường tròn tâm (O, R) và A, B là hai điểm thoả mãn $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2$.

a) Chứng minh : $\mathscr{P}_{A/(O)} + \mathscr{P}_{B/(O)} = AB^2$

b) Tính $\dfrac{1}{\mathscr{P}_{A/(O)}} + \dfrac{1}{\mathscr{P}_{B/(O)}}$

Lời giải

1) Ta có $\mathcal{P}_{A/(O)} = OA^2 - R^2 = \overrightarrow{OA}^2 - (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BA}$ (1)

Tương tự $\mathcal{P}_{B/(O)} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB}$ (2)

Từ (2) và (2) suy ra $\mathcal{P}_{A/(O)} + \mathcal{P}_{B/(O)} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = AB^2$

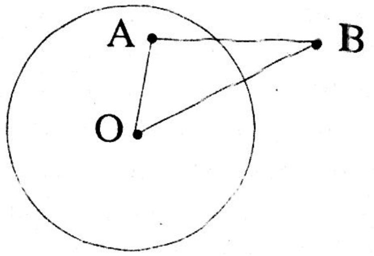
(đpcm)

2) Ta có $\dfrac{1}{\mathcal{P}_{A/(O)}} + \dfrac{1}{\mathcal{P}_{B/(O)}} = \dfrac{\mathcal{P}_{A/(O)} + \mathcal{P}_{B/(O)}}{\mathcal{P}_{A/(O)}.\mathcal{P}_{B/(O)}}$

$$= \frac{AB^2}{(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BA})(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB})} = \frac{AB^2}{(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB})}$$

$$= \frac{AB^2}{R^2(-\overrightarrow{AB}^2)} = -\frac{1}{R^2}$$

Tóm lại $\dfrac{1}{\mathcal{P}_{A/(O)}} + \dfrac{1}{\mathcal{P}_{B/(O)}} = -\dfrac{1}{R^2}$.



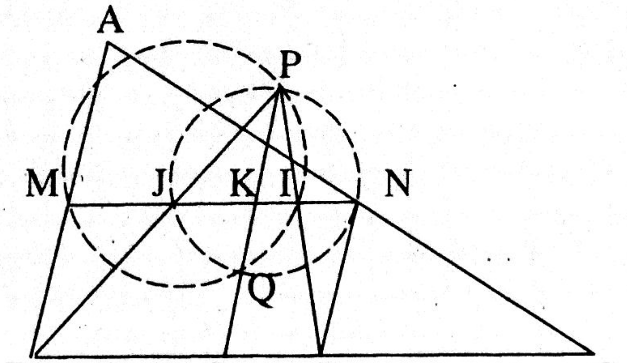
Hình 70

Thí dụ 4

Cho tam giác ABC có D, N, M theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB. Lại cho I (I ≠ M), J(J ≠ N) là hai điểm thay đổi trên MN. Gọi P = BJ∩DI. Gọi Q là giao điểm thứ hai của các đường tròn (PMI) và (PNJ). Chứng minh khi I, J thay đổi đoạn thẳng PQ luôn song song với một đường thẳng cố định.

Lời giải

Cách 1. Gọi K, L theo thứ tự lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với MN, BC. Rõ ràng PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (PMI) và (PNJ)



Hình 71

$\Rightarrow \overline{KI}.\overline{KM} = \overline{KJ}.\overline{KN}$

$\Rightarrow \dfrac{KI}{KJ} = \dfrac{KN}{KM}$ (4)

Mặt khác MN//BC (đường trung bình)

$\Rightarrow \dfrac{KI}{KJ} = \dfrac{LD}{LB}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $\dfrac{KN}{KM} = \dfrac{LD}{LB}$ (6)

Lại có ND//AB (đường trung bình) nên từ (6) suy ra KL//MB hay PQ//AB (đpcm). (h71)

Cách 2 :

Kẻ đường thẳng (Δ) qua P, (Δ)//AB. Ta sẽ chứng minh (Δ) là trục đẳng phương của hai đường tròn (PMI) và (PNJ)

Thật vậy, gọi K = MN ∩(Δ), L = BC∩(Δ), do MN//BC (đường trung bình)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{KI}}{\overline{KJ}} = \dfrac{\overline{LD}}{\overline{LB}} \Leftrightarrow \overline{KI}.\overline{LB} = \overline{KJ}.\overline{LD}$ (7)

Lại có ND//AB (đường trung bình) suy ra ND//KL//AB => $\overline{LB} = \overline{KM}$ và $\overline{LD} = \overline{KN}$, thay vào (7) ta có $\overline{KL}.\overline{KM} = \overline{KJ}.\overline{KN} \Leftrightarrow \wp_{K/(PMI)} = \wp_{K/(PNJ)}$ (8)

Hiển nhiên $\wp_{P/(PMI)} = \wp_{P/(PNJ)}$ (=0) (9)

Từ (8), (9) suy ra (Δ) là trục đẳng phương của hai đường tròn (PMI) và (PNJ)

=> PQ//AB (đpcm)

Lời bình

Đồng thời với trục đẳng phương luôn song song với một đường thẳng cố định, bạn cũng có kết quả đường thẳng nối tâm hai đường tròn (PMI) và (PNJ) có phương không đổi.

Thí dụ 5

Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R') không đồng tâm và không có điểm chung, có trục đẳng phương là đường thẳng(Δ). Gọi I là một điểm thay đổi trên (Δ). Từ I kẻ các tiếp tuyến IM, IN, IM', IN' tới hai đường tròn.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, M', N' nằm trên một đường tròn có tâm I, ta ký hiệu đó là đường tròn (I).

b) Với điểm I'∈(Δ) ta có đường tròn (I'). Chứng minh rằng đường thẳng OO' là trục đẳng phương của hai đường tròn.

c) Xem (I), (I') là các vị trí khác nhau của họ đường tròn ($\mathscr{C}_I$). Chứng minh rằng khi I thay đổi, họ đường tròn ($\mathscr{C}_I$) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có $\wp_{I/(O)} = IM^2 = IM'^2$, $\wp_{I/(O')} = IN^2 = IN'^2$.

Do I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn(O) và (O') $\Leftrightarrow \wp_{I/(O)} = \wp_{I/(O')}$

$\Leftrightarrow IM^2 = IM'^2 = IN^2 = IN'^2 \Leftrightarrow$ M, N, M', N' nằm trên một đường tròn có tâm là I (đpcm)

b) Nối O với M ta có OM⊥IM $\Rightarrow R^2 = OI^2 - MI^2$ hay $R^2 = OI^2 - R_I^2$ hay $R^2 = \wp_{O/(I)}$. Tương tự $R^2 = OI'^2 - I'N^2$ hay $R^2 = OI'^2 - R_{I'}^2$ hay $R^2 = \wp_{O/(I')}$

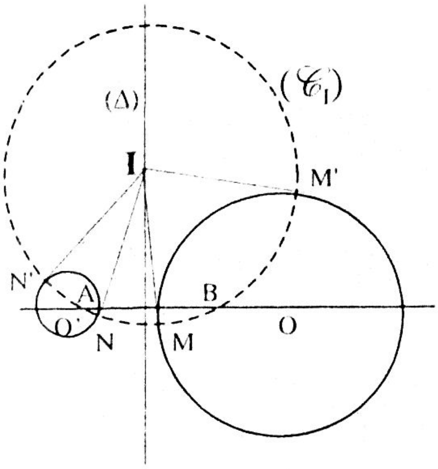
Suy ra $\wp_{O/(I)} = \wp_{O/(I')} \Rightarrow$ O là một điểm của trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (I').

Tương tự O' cũng là một điểm thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (I'). Vậy OO' chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (I'). Nói cách khác, OO' là trục đẳng phương của họ đường tròn ($\mathscr{C}_I$) (đpcm).

c) Gọi H = (Δ)∩O'O. DO (O') và (O) là hai đường tròn rời nhau nên (Δ) không có điểm chung với cả hai (O') và (O) nên OH > R = ON'

$\Rightarrow IO'^2 - OH^2 < IO'^2 - ON'^2$

$\Leftrightarrow IH^2 < IN'^2 \Leftrightarrow IH < IN = R_I$.



Hình 72

Suy ra đường thẳng O'O cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt A và B

$\Rightarrow \wp_{A/(I)} = \wp_{B/(I)} = 0$.

Do O'O là trục đẳng phương của họ đường tròn $(\mathcal{C}_I) \Rightarrow \mathcal{P}_{A/(I)} = \mathcal{P}_{B/(I)} = 0$ đúng với mọi I. Nói khác đi khi I thay đổi, họ đường tròn $(\mathcal{C}_I)$ luôn đi qua hai điểm cố định A và B nói trên (đpcm).

Thí dụ 6

Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến là BB' và CC'. Gọi H là trực tâm ΔABC. Chứng minh AH là trục đẳng phương của các đường tròn lần lượt có đường kính là BB', CC'.

Lời giải

Cách 1 : Gọi M, P, Q, N theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng C'B, BB', C'C, CB'. Kí hiệu (P), (Q) theo là thứ tự là các đường tròn lần lượt có đường kính là BB', CC'. Ta có

$$\begin{cases} MP /\!/ C'B' \text{ (đường trung bình của } \Delta BC'B') & (1) \\ MQ /\!/ BC \text{ (đường trung bình của } \Delta C'BC) & (2) \\ C'B' /\!/ BC \text{ (đường trung bình của } \Delta ABC) & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra PQ//BC. Do AH⊥BC ⇔ AH⊥PQ (4)

Ta có :

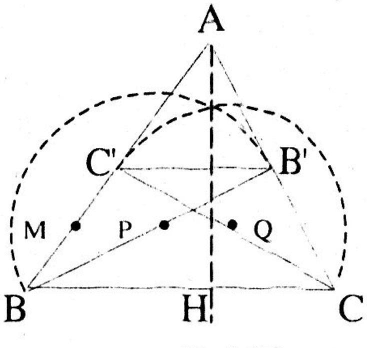
$$\mathcal{P}_{A/(P)} = AP^2 - \frac{BB'^2}{4} = \left(\frac{AB^2 + AB'^2}{2} - \frac{BB'^2}{4}\right) - \frac{BB'^2}{4} = \frac{AB^2 + AB'^2 - BB'^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(c^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{4} \quad (5)$$

$$\mathcal{P}_{A/(Q)} = AQ^2 - \frac{CC'^2}{4} = \left(\frac{AC^2 + AC'^2}{2} - \frac{CC'^2}{4}\right) - \frac{CC'^2}{4}$$

$$= \frac{AC^2 + AC'^2 - CC'^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2}{4}\right) = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{4} \quad (6)$$



Hình 73

So sánh (5) và (6) $\Rightarrow \mathcal{P}_{A/(P)} = \mathcal{P}_{A/(Q)}$ (7)

Từ (4) và (7) suy ra AH là trục đẳng phương của hai đường tròn (P) và (Q) (đpcm). (h 73).

Cách 2 : (Tiếp nối từ (4))

Vẽ các đường cao BK, CL của tam giác ABC. Rõ ràng K thuộc đường tròn đường kính BB', L thuộc đường tròn đường kính CC'.

Ta có $\mathcal{P}_{H/(P)} = \overline{HB}.\overline{HK}$, $\mathcal{P}_{H/(Q)} = \overline{HC}.\overline{HL}$

Ta có $\angle BLC = \angle BKC = 90^0 \Rightarrow$ Bốn điểm B, L, K, C thuộc đường tròn một đường tròn $\Rightarrow \overline{HB}.\overline{HK} = \overline{HC}.\overline{HL} \Leftrightarrow \mathcal{P}_{A/(P)} = \mathcal{P}_{A/(Q)}$ (9)

Từ (4) và (9) suy ra AH là trục đẳng phương của hai đường tròn (P) và (Q) (đpcm)

Lời bình

Cách giải 2 cho ta thấy rằng các giả thiết BB', CC' là các đường trung tuyến chỉ nhằm mục đích B'C'//BC. Bởi vậy bài toán có thể phát biểu rộng hơn :

Cho tam giác ABC có trực tâm là H. Một đường thẳng cùng phương với BC cắt đường thẳng AB, AC theo thứ tự tại C', B'. Chứng minh AH là trục đẳng phương của các đường tròn lần lượt có đường kính là BB', CC'

(Cách chứng không có gì khác với cách 2)

Thí dụ 7

Cho tam giác ABC có đường cao AH (H ở trong đoạn BC). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB và AC.

a) Chứng minh BEFC là tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

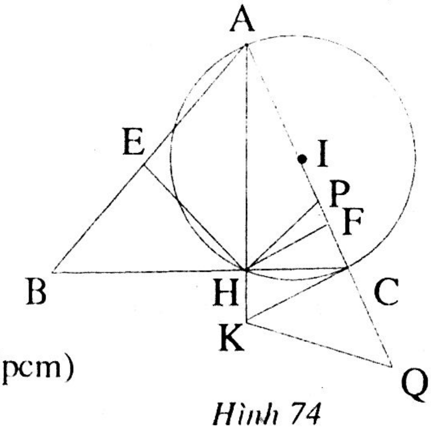
b) Gọi I là trung điểm AC, P là trung điểm IC, Q là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AC}$. Tiếp tuyến tại C của đường tròn đường kính AC cắt AH kéo dài tại K. Chứng minh tứ giác PQKH nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải

1) Trong tam giác HAB vuông tại H ta có $AH^2 = AE.AB$ (1)

Trong tam giác HAB vuông tại H ta có $AH^2 = AF.AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE.AB = AF.AC ⇔ BEFC là tứ giác nội tiếp được một đường tròn. (đpcm)



Hình 74

2) Ta có $\overline{AP}.\overline{AQ} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} =$

$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.\frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = AC^2 \qquad (3)$$

Trong tam giác AKC vuông tại C ta có

$AC^2 = AH.AK = \overline{AH}.\overline{AK}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $\overline{AP}.\overline{AQ} = \overline{AH}.\overline{AK}$

⇔ Tứ giác PQKH nội tiếp được một đường tròn (đpcm)

Lời bình

Nhân đây nhắc lại dấu hiệu bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn :

- Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn ⇔ có tổng các góc đối diện bằng hai vuông.
- Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn ⇔ có hai đỉnh nhìn hai đỉnh còn lại dưới cùng một góc.
- Đường thẳng nối hai điểm này (*chẳng hạn AB*) cắt đường thẳng nối hai điểm còn lại (*chẳng hạn CD*) tại điểm M thoả mãn $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$
- Tứ giác ABCD là hình thang cân thì nó nội tiếp một đường tròn .

Thí dụ 8

Cho tam giác ABC thay đổi nội tiếp trong đường tròn (O) và điểm P.
Đường thẳng qua P cùng phương với BC cắt AB tại M, cắt AC tại N.
Đường thẳng qua P cùng phương với CA cắt BC tại L, cắt BA tại K.
Đường thẳng qua P cùng phương với AB cắt CA tại F, cắt CB tại E.

Chứng tỏ rằng : $\overline{PM}.\overline{PN} + \overline{PE}.\overline{PF} + \overline{PK}.\overline{PL}$ là một số hằng, không phụ thuộc tam giác ABC.

Lời giải

Theo hệ thức Stioa (Stewart) trong tam giác OMN có :

$\overline{MP}.ON^2 + \overline{PN}.OM^2 + \overline{NM}.OP^2 = -\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM}$ (1)

Mặt khác $(\overline{MP} + \overline{PN} + \overline{NM}).R^2 = 0.R^2 = 0$ (2)

Trừ theo từng vế các kết quả (1) và (2) ta có

$\overline{MP}.(ON^2 - R^2) + \overline{PN}.(OM^2 - R^2) + \overline{NM}.(OP^2 - R^2) = -\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM}$

$\Leftrightarrow \overline{MP}.\wp_{N/(O)} + \overline{PN}.\wp_{M/(O)} + \overline{NM}.\wp_{P/(O)} = -\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM}$

$\Leftrightarrow \overline{MP}.\overline{NA}.\overline{NC} + \overline{PN}.\overline{MA}.\overline{MB} + \overline{NM}.\wp_{P/(O)} = -\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM}$ (3)

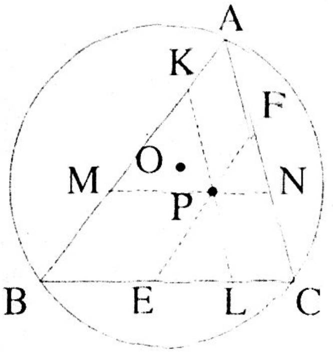
Ta có :

- $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{PK}} = \dfrac{\overline{NM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \overline{MP}.\overline{NA} = -\overline{NM}.\overline{PK}$

và $\overline{NC} = \overline{PL} \Rightarrow \overline{MP}.\overline{NA}.\overline{NC} = -\overline{NM}.\overline{PK}.\overline{PL}$ (4)

- $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{PF}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{PN}} \Leftrightarrow \overline{PN}.\overline{MA} = \overline{PE}.\overline{MN}$

và $\overline{MB} = \overline{PE} \Rightarrow \overline{PN}.\overline{MA}.\overline{MB} = -\overline{NM}.\overline{PF}.\overline{PE}$ (5)



Hình 75

Thay (4), (5) vào (3) có :

$-\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM} - \overline{NM}.\overline{PK}.\overline{PL} + \overline{NM}.\wp_{P/(O)} = -\overline{MP}.\overline{PN}.\overline{NM}$

$\Leftrightarrow \overline{PM}.\overline{PN} + \overline{PE}.\overline{PF} + \overline{PK}.\overline{PL} = \wp_{P/(O)}$=const, không phụ thuộc vào ΔABC (đpcm)

Thí dụ 9

Cho đường tròn (O, R) và một điểm A không nằm trên (O). BC là một đường kính quay quanh O.

1) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC luôn đi qua một điểm cố định khác với điểm A.

2) Gọi D=AB∩(O), E=AC∩(O). Chứng minh đoạn thẳng DE quay quanh một điểm cố định.

3) Tìm tập hợp tâm J của đường tròn (ADE) khi BC quay quanh O.

Lời giải

1) Gọi I (I ≠ A) là giao điểm của OA với đường tròn (ABC).

Ta có $\overline{OI}.\overline{OA} = \overline{OB}.\overline{OC} = -R^2$ (const) ⇒ I cố định.

Vậy khi BC quay quanh O, đường tròn (ABC) luôn đi qua điểm I cố định.

2) Gọi K=DE∩OA. Ta có :

∠BIA = ∠BCA (góc nội tiếp cùng chắn cung BDE)

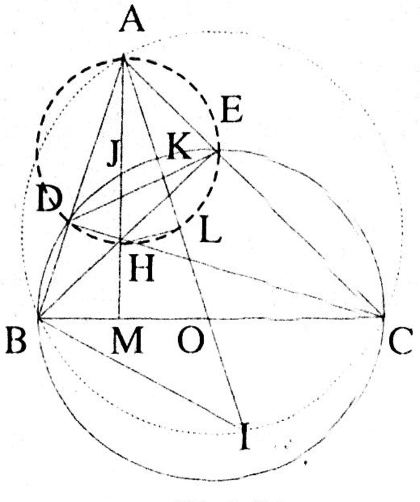
⇒ ∠BDE + ∠BIA = ∠BDE + ∠BCE = 180^0

(do BDEC là tứ giác nội tiếp)

⇒ BDKI là tứ giác nội tiếp được một đường tròn

$\Rightarrow \overline{AK}.\overline{AI} = \overline{AD}.\overline{AB} = \wp_{A/(O)} = AO^2 - R^2$

$\Rightarrow \overline{AK} = \dfrac{AO^2 - R^2}{\overline{AI}}$ (const) ⇒ K là điểm cố định.



Hình 76

Vậy khi BC thay đổi, đoạn thẳng DE luôn quay quanh điểm K cố định. (đpcm)

3) Gọi H là trực tâm ΔABC.

Dễ thấy H = BE∩CD (do ∠BDC = ∠BEC=90°) và H là đường kính của đường tròn (ADE).

Gọi M là chân đường cao AH trên BC. Trong tứ giác nội tiếp MHEC, ta có

$$\overline{AH}.\overline{AM} = \overline{AE}.\overline{AC} = \wp_{A/(O)} \qquad (1)$$

Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ H đến BC. Trong tứ giác nội tiếp MHLO, ta có $\overline{AL}.\overline{AO} = \overline{AH}.\overline{AM} = \wp_{A/(O)}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overline{AL}.\overline{AO} = \wp_{A/(O)} = AO^2 - R^2 \Rightarrow AL = \dfrac{AO^2 - R^2}{AO}$ (const)

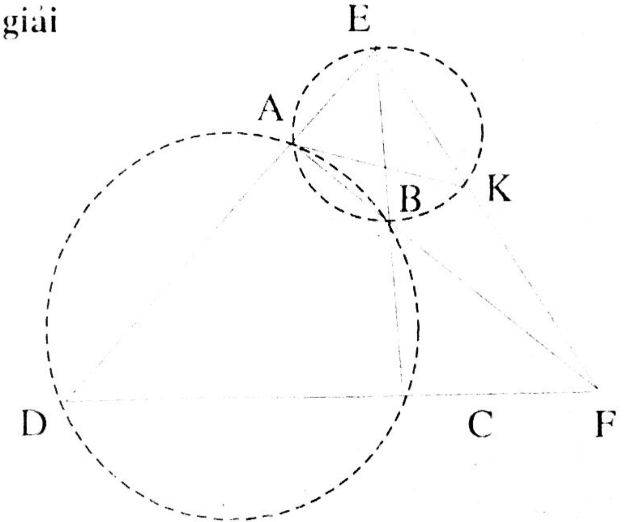
=> L là điểm cố định. Bởi vậy, khi BC quay quanh O, tâm đường tròn (DEF) thuộc đường trung trực đoạn thẳng AL.

Thí dụ 10

Phần kéo dài các cạnh đối diện AB và CD, AD và CB của tứ giác ABCD cắt nhau ở E và F. Giả sử $EA.ED + FA.FB = EF^2$.

Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải



Hình 77

Vẽ đường tròn (𝒞) ngoại tiếp ΔABE.

Gọi K là giao điểm thứ hai của EF với (𝒞). Theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có FA.FB=FK.FE

Thay vào giả thiết ta có

$EA.ED + FA.FB = EF^2$

⇔ $EA.ED+FK.FE =EF^2$

⇔ $EA.ED =EF^2–FK.FE$.

⇔ $EA.ED =EF(EF^2–FK)$

⇔ EA.ED =EF.EK ⇔ DAKF là tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

⇒∠ADF + ∠AKF =180 (1)

Lại có ∠ABE = ∠AKE (góc nội tiếp cùng chắn một cung) (2)

⇒ ∠ABC=∠AKF (cùng bù với hai góc bằng nhau nói ở (2)) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle ADC+\angle ABC=\angle ADC+\angle AKF=180^0$

⇒ Tứ giác ABCD nội tiếp được một đường tròn. (đpcm)

Thí dụ 11. (Đề thi học sinh giỏi lớp 10, tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2006)

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) cắt trung tuyến BM tại H, K.

Biết rằng BH=HK=KM. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{13} = \dfrac{b}{10} = \dfrac{c}{5}$.

Lời giải

Giải sử (I) tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại T, R, S ta có :

$$BT^2=BH.BK \text{ hay } \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_b \cdot \frac{2}{3}m_b \Leftrightarrow \left(\frac{c+a-b}{2}\right)^2 = \frac{2}{9}m_b^2 \qquad (1)$$

Mặt khác $BS^2 = BH.BK = MK.MH = MR^2 \Rightarrow BS = MR$.

Dễ thấy AS = AR. Vậy $AB = AM \Rightarrow AC = 2AB \Leftrightarrow b = 2c$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{c^2+a^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2-c^2}{9}$

$\Leftrightarrow (a-c)(5a-13c) = 0$.

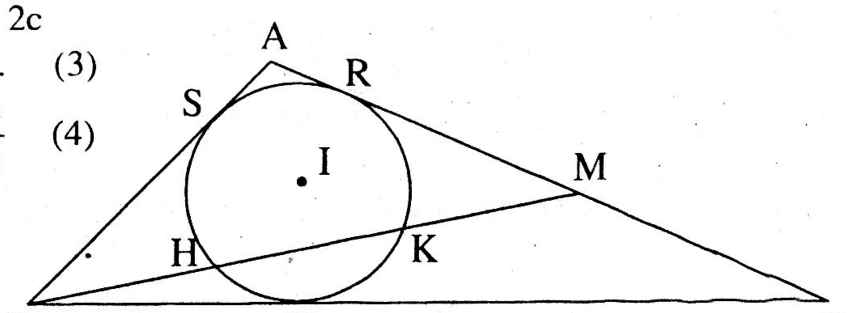
Với $a - c = 0$ thì $a + c = 2c$

$\Rightarrow a + c = b$. Mâu thuẫn. (3)

Với $5a-13c=0 \Rightarrow \dfrac{a}{13} = \dfrac{c}{5}$ (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra

$\dfrac{a}{13} = \dfrac{b}{10} = \dfrac{c}{5}$ (đpcm).(h78)



Hình 78

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, CA = 4, AB = 2.

Gọi ($\mathscr{C}$) là đường tròn qua A tiếp xúc với cạnh BC tại D, và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $a = \sqrt{cBM} + \sqrt{b.CN}$.

b) Giả sử tứ giác BCNM nội tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng :

$BM = c.\cos^2 B$; $CN = b.\cos^2 C$. (Có nhận xét gì về điểm D)

c) Giả sử tam giác ABC đều có cạnh là 3a và BD=2a. Tính bán kính đường tròn ($\mathscr{C}$).

Bài 2. Cho một điểm P cố định nằm trong đường tròn (O). Giả sử A là một điểm di động trên đường tròn (O). Kẻ dây cung $AB \perp PA$, BC//PA.

Chứng minh rằng dây cùng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3. Cho một điểm P cố định nằm trong đường tròn (O). Giả sử AB là một dây cung của đường tròn (O) luôn đi quay quanh điểm P . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, B cắt nhau ở C. Tìm quỹ tích điểm C.

Bài 4. Cho một điểm OP cố định nằm trong đường tròn (O, R). Một góc vuông $\angle xPy$ quay quanh điểm P có các cạnh Px, Py lần lượt cắt đường tròn tại A, B.

a) Hãy tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng AB.

b) Hãy tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của P trên đường thẳng AB.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm BC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp ΔAOM lần lượt cắt BC tại E ($E \neq M$) và cắt đường tròn (O) tại điểm D ($D \neq A$). Gọi F là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FM}$

b) $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$

c) Đường thẳng EA vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O), vừa là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAFM.

Bài 6. Cho một điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O). Giả sử BC là một đường kính quay quanh O.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC luôn đi qua một điểm cố định I mà $I \neq A$.

b) Giả sử AB và AC lần lượt cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường thẳng AI và DE. Chứng minh rằng tứ giác KICE nội tiếp được một đường tròn. Từ đó hãy chứng tỏ rằng K cũng là điểm cố định.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O), (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại T; AB là tiếp tuyến chung của (O) và (O'), ($A \in (O)$, $B \in (O')$; C là điểm xuyên tâm đối của A. Qua C, kẻ tiếp tuyến CD với (O'). Chứng minh CD=CA.

Bài 8. Cho A' và B' ($A' \neq A$, $B' \neq B$) là hai điểm thay đổi trên cạnh AB của hình bình hành ABCD. Gọi $P = A'C \cap B'D$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (PAA') vă (PBB'). Chứng minh PQ//AD.

Bài 9. Cho tam giác ABC có BC=a, CA=b, AB=c.

a) Tính $\wp_{A/(GBC)}$ theo a, b, c.

b) Chứng minh rằng $\wp_{A/(GBC)} + \wp_{A/(GCA)} + \wp_{A/(GAB)} = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Bài 10. Cho hai đường tròn (O), (O'). M là một một điểm bất kì. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục đẳng phương của (O) và (O').

Chứng minh rằng $\wp_{M/(O)} = -\wp_{M/(O')} 2\overline{OO'}.\overline{HM}$

Bài 11. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Qua một điểm trên đoạn thẳng AB kẻ hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2). Đường thẳng (Δ_1) cắt (O_1) tại X, N cắt (O_2) tại Y, M (XM<XN<XY). Đường thẳng (Δ_2) cắt (O_1) tại Z, P cắt (O_2) tại Q, T (ZQ<ZP<ZT). Chứng minh rằng :XP,TM, AB đồng quy khi và chỉ khi ZN, YQ, AB đồng quy.

Bài 12. Cho đường tòn (O) và ba điểm thẳng hàng A, B, C. Chứng minh rằng

$$\wp_{A/(O)}\overline{BC} + \wp_{B/(O)}\overline{CA} + \wp_{C/(O)}\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$$

HƯỚNG DẪN–VẮN TẮT GIẢI

Bài 2. *Hướng dẫn* : Nối PO cắt BC tại P_1.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CP_1} \Rightarrow CP_1$ cùng phương với CB

$\Rightarrow$ B, C, P_1 thẳng hàng hay BC luôn đi qua P_1 cố định. (đpcm)

Bài 3. *Hướng dẫn* : Gọi $H = AB \cap OC$. Kẻ $CH \perp OP$.

Trong tứ giác nội tiếp CEPH có OP.OH = OE.OC.

Trong tam giác OBC vuông tại B có $OE.OC = OB^2 = R^2$.

Từ đó suy ra $OH.OP = R^2 \Leftrightarrow OH = \dfrac{R^2}{OP} \Rightarrow$ H cố định

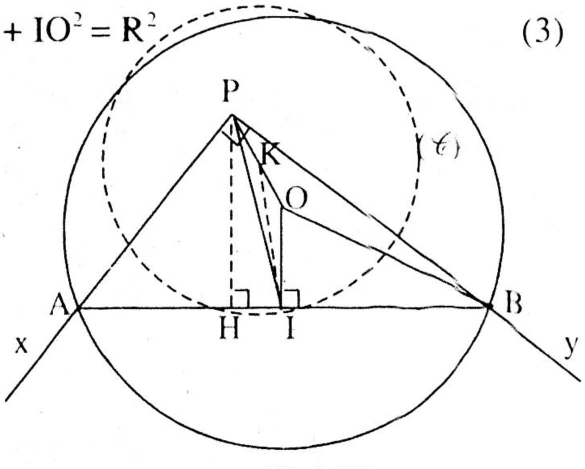
$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm C cần tìm là đường thẳng $(\Delta) \perp OP$ tại H.

Bài 4.

a) Ta có $4IP^2 = 2(PA^2 + PB^2) - AB^2 = PA^2 + PB^2 = AB^2$ (do $PA^2 + PB^2 = AB^2$) (1)

$$4IO^2 = 2(OA^2 + OB^2) - AB^2 = 2R^2 - AB^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4(IP^2 + IO^2) = 2R^2 \Leftrightarrow IP^2 + IO^2 = R^2$ (3)



Hình 79

Để ý điểm I thuộc đoạn thẳng AB

$\Rightarrow$ Điểm I nằm trong đường tròn (O).

Bởi thế nên từ (3) suy ra :

Tập hợp các điểm I là phần nằm trong đường tròn (O) của đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm K (trung điểm OP) và bán kính

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OP^2}$$

b) Ta có $HO^2 = IO^2 + IH^2$, $HP^2 = IP^2 - IH^2$

$\Rightarrow HO^2 + HP^2 = IP^2 + IO^2 = R^2$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm H cũng là phần của đường tròn $(\mathscr{C})$ nói ở câu a).

Bài 5. (Hình 80.1)

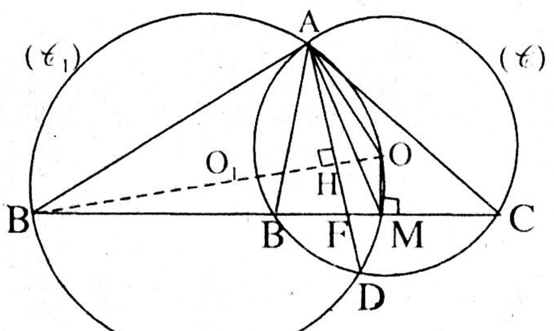
a) Ta có $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FA}.\overline{FD} = \overline{FE}.\overline{FM} \Rightarrow \overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$ (đpcm)

b) Tứ giác OHFM nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \overline{EF}.\overline{EM} = \overline{EH}.\overline{EO} = EA^2$ (1)

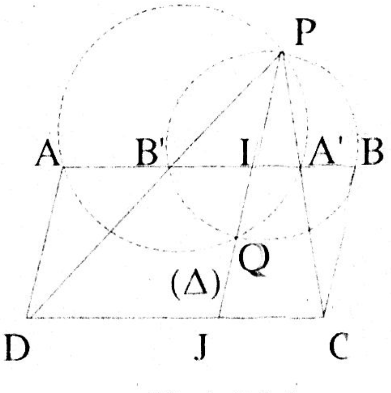
Lại có $\overline{EB}.\overline{EC} = \mathscr{P}_{E/(\mathscr{C}_1)} = EO^2 - R^2 = EO^2 - OA^2 = EA^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow EA^2 = \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EF}.\overline{EM}$ (đpcm) (3)

c) Cũng từ (3) $\Rightarrow$ Đường thẳng EA vừa là tiếp tuyến của đường tròn (O), vừa là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔAFM. (đpcm)



Hình 80.1



Hình 80.2

Bài 8. (Hình 80.2)

Cách 1 : Gọi I, J theo thứ tự lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với AB, CD. Rõ ràng PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn (PAA') và (PBB')

$$\Rightarrow \overline{IA'}.\overline{IA} = \overline{IB'}.\overline{IB} \Leftrightarrow \frac{IA'}{IB'} = \frac{IB}{IA} \qquad (4)$$

Mặt khác AB//DC $\Rightarrow \dfrac{IA'}{IB'} = \dfrac{JC}{JD}$ (5)

So sánh (4) và (5) suy ra $\frac{IA}{IB}=\frac{JD}{JC}$ => IJ//AB hay PQ//AB (đpcm)

Cách 2 : Kẻ đường thẳng (Δ) qua P, Δ//AB. Ta sẽ chứng minh (Δ) là trục đẳng phương của hai đường tròn (PAA') và (PBB').

Thật vậy, gọi I=AB∩(Δ), J=DC∩(Δ), do AB//CD (cạnh đối của hình bình hành)

$\Rightarrow \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}=\frac{\overline{JC}}{\overline{JD}} \Leftrightarrow \overline{IA'}.\overline{JD}=\overline{IB'}.\overline{JC}$ (1)

Do (Δ)//BC $\Rightarrow \overline{JD}=\overline{IA}$, $\overline{JC}=\overline{IB}$ nên (1) $\Leftrightarrow \overline{IA'}.\overline{IA}=\overline{IB'}.\overline{IB}$

$\Leftrightarrow \wp_{I/(PAA')}=\wp_{I/(PBB')}$ (2)

Hiển nhiên $\wp_{P/(PAA')}=\wp_{P/(PBB')}=0$ (3)

Từ (2), (3) suy ra (Δ) là trục đẳng phương của hai đường tròn (PAA') và (PBB') => PQ//AB (đpcm)

- Các bài còn lại dành cho bạn đọc tự giải.

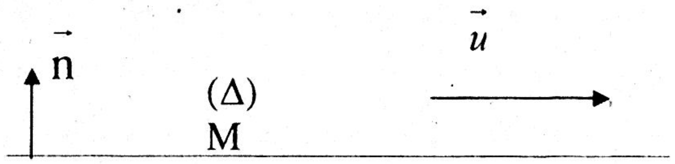
Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. ĐƯỜNG THẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của đường thẳng



- $\vec{n}=(A;\,B)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \in (\Delta') \\ (\Delta') \perp (\Delta) \end{cases}$
- $\vec{u}=(a;\,b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng $(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \in (\Delta') \\ (\Delta') \upharpoonleft\!\upharpoonright (\Delta) \end{cases}$

Kí hiệu : $\upharpoonleft\!\upharpoonright$: *cùng phương*, $\upuparrows$: *cùng hướng*, $\downarrow\uparrow$: *ngược hướng*

Chú ý

Nếu $\vec{n}$, $\vec{u}$ theo thứ tự là vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) thì theo thứ tự các vectơ $k.\vec{n}$, $l.\vec{u}$ $(k \neq 0,\ l \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) (vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của đường thẳng không có tính duy nhất).

Rõ ràng đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết :

- hai điểm thuộc nó.
- hoặc một điểm thuộc nó và có phương cho trước

2. Phương trình đường thẳng

a) Phương trình tổng quát của đường thẳng

Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ Oxy đều có phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ và ngược lại.

Phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

Vectơ $\vec{n}=(A;\,B)$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng.

b) Phương trình đường thẳng (Δ) qua một điểm $M(x_0;\,y_0)$ có phương cho trước

Phương của đường thẳng có thể được xác định bởi vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương, hệ số góc bằng k (hợp với chiều dương của trục Ox một góc α có $tg\alpha=k$), hợp với chiều dương của trục Ox một góc cho trước. Từ đó có :

Phương trình đường thẳng (Δ) qua một điểm $M(x_0;\,y_0)$ và

* có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;\,B)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (1)$$

* có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;\ b)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (t \in R) \qquad (2)$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (\text{với } a\neq 0,\ b\neq 0) \qquad (3)$$

Phương trình (1) được gọi là *phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước.*

Hệ phương trình (2) được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng Phương trình (3) được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng

* (Δ) có hệ số góc bằng k : $y = k(x - x_0) + y_0$

(Đó là trường hợp đặc biệt của phương trình tổng quát với $\vec{n}=(k;-1)$)

c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm phân biệt

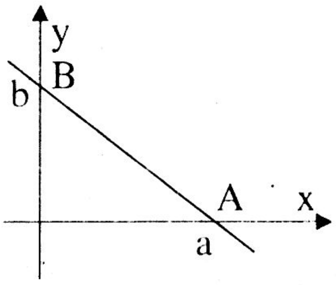
$A(x_A;\ y_A)$, $B=(x_B;\ y_B)$.

- $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, nếu $\{x_B \neq x_A$ và $y_B \neq y_A\}$
- $x = x_A(x_B)$ nếu $x_A = x_B$
- $y = y_A(y_B)$ nếu $y_A = y_B$

Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

- $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (h81)

(đó là trường hợp đường thẳng qua A(a; 0) và B(0; b))



Hình 81

d) Chùm đường thẳng

Định nghĩa : *Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm I được gọi là chùm đường thẳng.*

Điểm I được gọi là tâm của chùm.

Phương trình chùm đường thẳng có tâm là I :

- $\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0$ $(\lambda^2+\mu^2>0)$, với $I(x_0;y_0)$
- $\lambda(Ax+By+C)+\mu(A'x+B'y+C')=0$, $(\lambda^2+\mu^2>0)$, với $I=(\Delta)\cap(\Delta')$,

trong đó (Δ) : $Ax+By+C=0$, (Δ') : $A'x+B'y+C'=0$, $A: A' \neq B: B'$

Hai đường thẳng (Δ) và (Δ') được gọi là hai *đường thẳng cơ sở* của chùm.

3. Góc giữa hai đường thẳng

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ').

- Nếu (Δ) và (Δ') có phương trình tổng quát

(Δ): $Ax + By + C = 0$, (Δ'): $A'x + B'y + C' = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, $A'^2 + B'^2 > 0$

thì ta có

$$\cos\alpha = \frac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Đặc biệt : $(\Delta)\perp(\Delta') \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$ (3)

- Nếu (Δ) và (Δ') có phương trình (Δ): $y = ax + b$, (Δ'): $y = a'x + b'$, và

  Nếu $aa' \neq -1$ thì $tg\alpha = \left|\frac{a - a'}{1 + aa'}\right|$

  Nếu $aa' = -1$ thì $aa' = -1 \Leftrightarrow (\Delta) \perp (\Delta')$. (4)

Chú ý.

Từ (3) suy ra đường thẳng (Δ') vuông góc với (Δ) : $Ax + By + C = 0$ có phương trình là (Δ') : $kBx - kAy + m = 0$, $k \neq 0$

Từ (4) suy ra đường thẳng (Δ') vuông góc với (Δ) : $y = ax + b$ có phương trình là (Δ') : $y = -\frac{1}{a}x + b'$, $a \neq 0$

Chúng ta sử dụng kết quả này để viết phương trình đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

4. Khoảng cách từ điểm M(x_0; y_0) đến đường thẳng (Δ) : Ax+By+C=0

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

5. Công thức đường phân giác

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

6. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

(Δ) : $Ax + By + C = 0$, (Δ') : $A'x + B'y + C' = 0$

Kí hiệu : $D = \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$

Vị trí tương đối		Định thức		Hệ số
(Δ) và (Δ') cắt nhau	⇔	$D \neq 0$	⇔	$\frac{A'}{A} \neq \frac{B'}{B}$ (nếu $AB \neq 0$)
(Δ) // (Δ')	⇔	$\left[\begin{array}{l}(D = 0, D_x \neq 0) \\ (D = 0, D_y \neq 0)\end{array}\right.$	⇔	$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \neq \frac{C'}{C}$ (nếu $ABC \neq 0$)
(Δ) và (Δ') trùng nhau	⇔	$D = D_x = D_y = 0$	⇔	$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ (nếu $ABC \neq 0$)

7. Dấu của tam thức bậc nhất $f(x, y)=Ax^2+Bx+C$ $(A^2+B^2>0)$

Định lý :

Đường thẳng $f(x, y):=Ax^2+Bx+C=0$ chia mặt phẳng ra làm hai miền, trong một miền $f(x; y)$ giữ cùng một dấu. Trên hai miền khác nhau $f(x, y)$ có dấu đối nhau.

Như vậy :

* Dấu của miền mặt phẳng chứa điểm $M(x_0, y_0)$ cùng dấu với $f(x_0, y_0)$

* Hai điểm $M(x_0, y_0)$ và $M_1(x_1, y_1)$ ở cùng một phía đối với đường thẳng $f(x, y) = Ax^2 + Bx + C = 0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0).f(x_1, y_1) > 0$

* Hai điểm $M(x_0, y_0)$ và $M_1(x_1, y_1)$ ở khác phía đối với đường thẳng $f(x, y) = Ax^2 + Bx + C = 0 \Leftrightarrow f(x_0, y_0).f(x_1, y_1) <0$

Trong cuốn sách này quy ước

Nếu $M = (x_0, y_0)$ viết $f(M)$ thay cho $f(x_0, y_0)$.

Trọng tâm của chương là viết phương trình đường thẳng.

Các kiến thức về góc, khoảng cách, phân giác, chùm đường thẳng, dấu của tam thức bậc nhất được xem như các kiến thức bổ trợ không thể thiếu. Để tăng tính hấp dẫn, kích thích sự phát triển tư duy, sách không trình bày riêng lẻ các nội dung bổ trợ. Các bạn theo dõi sự vận dụng nó được trình bày tích hợp trong các thí dụ.

II. CÁC BÀI TOÁN VÀ KỸ THUẬT CƠ BẢN

Bài toán 1.

Viết phương trình đường thẳng xác định tường minh.

(Đường thẳng qua hai điểm phân biệt hoặc qua một điểm và có phương cho trước được gọi là đường thẳng xác định tường minh.)

Kỹ thuật 1. *Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt* $A(x_A; y_A)$, $B=(x_B; y_B)$.

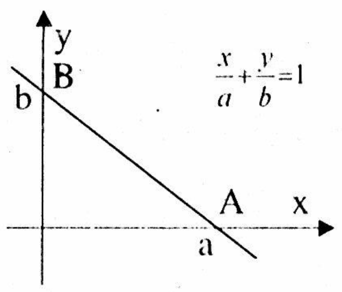
Tuỳ theo toạ độ cụ thể của toạ độ các điểm A và B mà vận dụng các công thức sau đây:

- $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, nếu $\{x_B \neq x_A$ và $y_B \neq y_A\}$
- $x = x_A(= x_B)$ nếu $x_A = x_B$
- $y = y_A(= y_B)$ nếu $y_A = y_B$

Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

- $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (h82)

(đó là trường hợp đường thẳng qua A(a; 0) và B(0; b))



Hình 82

Thí dụ 1

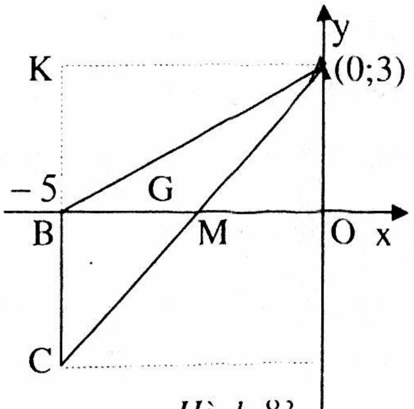
Cho tam giác ABC có A=(0; 3), B=(−5; 0), C=(−5; −3)

1) Viết phương trình các cạnh, trung tuyến BM, đường cao AH.

2) Tính diện tích, xác định toạ độ trọng tâm tam giác.

Lời giải

1) *Phương trình các cạnh* (h83):



Hình 83

- (AB) : $\dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x - 5y + 15 = 0$
- Để ý $x_B = x_C = -5 \Rightarrow x = -5$ là phương trình của (BC).
- (CA) : $\dfrac{x-x_C}{x_A-x_C}=\dfrac{y-y_C}{y_A-y_C}$

hay $\dfrac{x+5}{0+5}=\dfrac{y+3}{3+3} \Leftrightarrow 6(x + 5) = 5(y + 3)$

$\Leftrightarrow 6x - 5y + 15 = 0.$

Phương trình trung tuyến (BM) (h83):

M là trung điểm AC $\begin{cases} x_A + x_C = 2x_M \\ y_A + y_C = 2y_M \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 - 5 = 2x_M \\ 3 - 3 = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\dfrac{5}{2} \\ y_M = 0 \end{cases}$

hay $M=\left(-\dfrac{5}{2};\ 0\right)$

- Để ý $y_B = y_M = 0 \Rightarrow y = 0$ là phương trình trung tuyến BM.

2) *Tính diện tích, xác định toạ độ trọng tâm tam giác.* (h83)

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Do BC//Oy suy ra : $BC = |y_B - y_C| = 3$ và $AK = |x_A - x_K| = 5$

- Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}BC.AK=\dfrac{1}{2}3.5=\dfrac{15}{2}$ (đvdt)
- Trọng tâm ΔABC

Gọi G là trọng tâm ΔABC ta có $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases}$ hay $\begin{cases} 0 + -5 - 5 = 3x_G \\ 3 + 0 - 3 = 3y_G \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\dfrac{10}{3} \\ y_G = 0 \end{cases}$ hay $G=\left(-\dfrac{10}{3};\ 0\right)$

Kỹ thuật 2. *Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có phương cho trước.*

- Nếu phương cho bởi vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A; B)$ thì đường thẳng (Δ) có phương trình : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$
- Nếu phương cho bởi vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a; b)$ thì đường thẳng (Δ) có phương trình : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(t \in R)$ hoặc $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$ (với $a \neq 0$, $b \neq 0$)
- Nếu phương cho bởi hệ số góc bằng k thì đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

Thí dụ 2

Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(2; − 1) và

a) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-3)$.

b) có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(4;\ 6)$.

c) có hệ số góc k = 3.

Lời giải

a) Phương trình nhận đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(2; −1) và nhận $\vec{n}=(1;-3)$ làm vectơ pháp tuyến là : $2(x-x_M)-3(y-y_M)=0$ hay $2(x-2)-3(y+1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y-7$

b) *Bài ra không nói rõ là viết phương trình tổng quát hay phương trình tham số, nên bạn có thể trình bày theo hai cách sau đây :*

Cách 1 : Đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(2; −1) và nhận $\vec{u}=(4;\ 6)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tổng quát là :

$$\frac{x-x_M}{4}=\frac{y-y_M}{6}\ (*)\ \text{hay}\ \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{6} \Leftrightarrow 6(x-2)+4(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ 6x+4y-8=0\ \Leftrightarrow\ 3x+2y-4=0.$$

Chú ý : Ta có thể chọn $\vec{u}'=\frac{1}{2}\vec{u}=(2;\ 3)$ để lời giải "khéo" hơn :

$$(*)\Leftrightarrow \frac{x-x_M}{2}=\frac{y-y_M}{3}\ \text{hay}\ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ 3(x-2)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y=4=0.$$

Cách 2 : Đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(2; −1) và nhận $\vec{u}=(4;\ 6)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số là : $\begin{cases}x=2+4t\\ y=-1+6t\end{cases}$ $(t\in R)$

Cũng như trên chọn $\vec{u}'=(2;\ 3)$ có phương trình là $\begin{cases}x=2+2t\\ y=-1+3t\end{cases}$ $(t\in R)$ (1)

Chú ý : Khi viết phương trình tham số "*hình thức*" phương trình của đường thẳng có thể sai khác số hạng đứng ngoài tham số. Chẳng hạn :

Phương trình tham số của đường thẳng trên có thể là $\begin{cases}x=2t\\ y=-4+3t\end{cases}$ $(t\in R)$ (2)

Chẳng qua trong (1) thay t bởi t'+1 có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2(t'-1)\\ y=-1+3(t'-1)t\end{cases}\Leftrightarrow$ (2)

Nói khác đi M(2; −1) và M'(0; −4) là những điểm mà đường thẳng (Δ) cùng đi qua. (Kết quả (1) sử dụng điểm M(2; − 1) còn kết qủa (2) sử dụng điểm M'(0; −4).

(Bạn đọc nhớ điều này để kiểm tra bài làm của mình khi thấy kết quả của bài làm chưa giống với đáp án)

c) Phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm M(2; − 1) có hệ số góc k=3 là $y=3(x-x_M)+y_M$ hay $y=3(x-2)-1 \Leftrightarrow y=3x-7$.

Lời bình

Thông thường phương của đường thẳng được cho phổ biến là song song, vuông góc với đường thẳng cho trước hoặc tạo với đường thẳng cho trước một góc đã xác định.

Kỹ thuật 3

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ và

a) cùng phương với đường thẳng (Δ) cho trước.

b) vuông góc với đường thẳng (Δ) cho trước.

a) • (d) cùng phương với (Δ): $Ax + By + C = 0$, có phương trình

$$A(x - x_M) + B(y - y_M) = 0.$$

• (d) cùng phương với (Δ): $y = ax + b$, với $a \neq 0$ có phương trình

$$y = a(x - x_M) + y_M.$$

• (d) cùng phương với (Δ): $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(t \in R)$ có phương trình

$$\begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \end{cases} \quad (t \in R)$$

b) • $(d) \perp (\Delta)$: $Ax + By + C = 0$ có phương trình $kB(y - x_M) - kA(y - y_M) = 0$. với $k \neq 0$ tuỳ chọn.

• $(d) \perp (\Delta)$: $y = ax + b$, với $a \neq 0$ có phương trình $y = -\frac{1}{a}(x - x_M) + y_M$.

• $(d) \perp (\Delta)$: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(t \in R)$ có phương trình $\begin{cases} x = x_M + bt \\ y = y_M - at \end{cases}$ $(t \in R)$

Thí dụ 3

Cho đường thẳng (Δ) : $2x + 3y - 1 = 0$ và điểm $M = (1; -2)$

Viết phương trình đường thẳng (Δ') qua M và

1) (Δ')//(Δ).

2) (Δ')⊥(Δ).

Lời giải

1) Hai đường thẳng song song có cùng vectơ pháp tuyến, bởi vậy phương trình đường thẳng (Δ') qua M cùng phương với (Δ) là $2(x - 1) + 3(y + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + 4 = 0. \qquad (1)$$

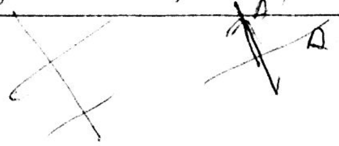
Toạ độ điểm A không là nghiệm của phương trình đường thẳng (Δ) nên (1) là phương trình đường thẳng (Δ')//(Δ).

2) Phương trình đường thẳng (Δ') qua M vuông góc với (Δ) là

$$3(x - 1) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 5 = 0.$$

Thí dụ 4.

Viết phương trình đường thẳng (d) qua $M = (1; -1)$ và tạo với đường thẳng (Δ) : $y = (\sqrt{2} - 1)x - 3$ một góc lớn nhất, nhỏ nhất.



Lời giải

- (d) tạo với (Δ) một góc lớn nhất ⇔ (d)⊥(Δ) ⇔ (d) có phương trình là

$$y=-\frac{1}{\sqrt{2}-1}(x-x_M)+y_M \text{ hay } y=-\frac{1}{\sqrt{2}-1}(x-1)-1$$

$\Leftrightarrow y=-(\sqrt{2}+1)(x-1)-1 \Leftrightarrow y=-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$

- (d) tạo với (Δ) một góc nhỏ nhất ⇔ (d) và (Δ) cùng phương ⇔ (d) có phương trình là $y=(\sqrt{2}-1)(x-x_M)+y_M$ hay $y=(\sqrt{2}-1)(x-1)-1$

$\Leftrightarrow y=(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}$

Kỹ thuật 4

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ và hợp với đường thẳng (Δ) một góc α cho trước.

- Nếu (Δ) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B)$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ có dạng

$\lambda(x-x_M)+\mu(y-y_M)=0, (\lambda^2+\mu^2>0).$ (1)

Vectơ pháp tuyến của (d) là $\vec{n}'=(\lambda;\mu)$

(d) hợp với (Δ) một góc bằng α ⇔ $\cos\alpha=\dfrac{|A\lambda+B\mu|}{\sqrt{(A^2+B^2)(\lambda^2+\mu^2)}}$

$\Leftrightarrow (A\lambda+B\mu)^2=(A^2+B^2)(\lambda^2+\mu^2)$ (2).

Với mỗi họ nghiệm của phương trình đẳng cấp đối với λ và μ, tuỳ chọn một cặp (λ, μ) thay vào (1) cho ta một đường thẳng cần tìm.

- Nếu (Δ) có hệ số góc bằng a≠0, bạn còn có cách

Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_M; y_M)$ có dạng

$y=a'(x-x_M)+y_M.$ (3)

(d) hợp với (Δ) một góc bằng α ⇔ $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{a-a'}{1+aa'}\right|$ (4)

Mỗi giá trị a' là nghiệm của (4) thay vào (3) cho ta phương trình đường thẳng (d) cần tìm.

Đặc biệt :

Khi $\alpha=45^0$ bạn còn có cách sử dụng công thức đường phân giác

- Giả sử (Δ) có phương trình Ax+By+C=0 . Ta có :

*Một đường thẳng (Δ')⊥(Δ) có phương trình là Bx−Ay=0

*Các đường phân giác l_1, l_2 của góc giữa (Δ) và (Δ') có phương trình là

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm\frac{Bx\pm Ay}{\sqrt{A^2+B^2}} \Leftrightarrow Ax+By+C=\pm(Bx-Ay)=0 \quad (5)$$

*Đường thẳng (d) qua M và tạo với đường thẳng(Δ) một góc bằng 45^0 ⇔ (d) cùng phương với l_1, l_2.

*Sử dụng kĩ thuật 3 hoàn thành phần còn lại của bài toán.

Thí dụ 5
Viết phương trình đường thẳng qua M(0; 1) và tạo với đường thẳng
$(\Delta): 2x - y + 1 = 0$ một góc bằng 30^0.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (Δ') qua A có dạng $\lambda x + \mu(y - 1) = 0$ (1)
với $\lambda^2+\mu^2>0$. Vectơ pháp tuyến của (Δ'), (Δ) theo thứ tự lần lượt là $\vec{n'} = (\lambda; \mu)$, $\vec{n} = (2; -1)$). Gọi α là góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') ta có

$$\cos\alpha = \frac{|2\lambda - \mu|}{\sqrt{(2^2+1^2)(\lambda^2+\mu^2)}} = \frac{|2\lambda - \mu|}{\sqrt{5(\lambda^2+\mu^2)}}.$$

Hai đường thẳng (Δ) và (Δ') hợp với nhau một góc $30^0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos 30^0 \Leftrightarrow \frac{|2\lambda - \mu|}{\sqrt{5(\lambda^2+\mu^2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 4(2\lambda - \mu)^2 = 5.3(\lambda^2 + \mu^2) \Leftrightarrow \lambda^2 - 16\lambda\mu - 11\mu^2 = 0$ (2)

Do $\mu \neq 0$, đặt $\lambda = \mu t$, ta có (2) trở thành $\mu^2(t^2 - 16t - 11) = 0$

$\overset{\mu\neq 0}{\Leftrightarrow} t^2 - 16t - 11 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 8 \pm 5\sqrt{3}$

- Với $t = 8 + 5\sqrt{3}$ ta có $\lambda = \mu(8 + 5\sqrt{3})$. Chọn $\mu = 1$, có $\lambda = (8 + 5\sqrt{3})$, thay vào (1) có $(8+5\sqrt{3})x + y - 1 = 0$.
- Với $t = 8 - 5\sqrt{3}$ ta có $\lambda = \mu(8 - 5\sqrt{3})$. Chọn $\mu = 1$, có $\lambda = (8 - 5\sqrt{3})$, thay vào (1) có $(8 - 5\sqrt{3})x + y - 1 = 0$.

Tóm lại : Qua M có đúng hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là

$(d_1) : (8+5\sqrt{3})x + y - 1 = 0$, $(d_2) : (8 - 5\sqrt{3})x + y - 1 = 0$.

Thí dụ 6 (Đ71)
Viết phương trình đường thẳng qua A(2; 1) và tạo với đường thẳng
$(\Delta) : 2x + 3y + 4 = 0$ một góc bằng 45^0.

Lời giải

Cách 1 : Gọi (Δ') là đường thẳng có phương trình $3x - 2y = 0$. Rõ ràng $(\Delta') \perp (\Delta)$. Các đường phân giác $l_{1,2}$ của góc tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là

$$\frac{2x + 3y + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \pm \frac{3x - 2y}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 5y - 4 = 0 \\ 5x + y + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Gọi (d) là đường thẳng qua A tạo với (Δ) một góc $45^0 \Leftrightarrow$ (d) có cùng phương với các đường phân giác $l_{1,2} \Leftrightarrow$ (d) có phương trình là :

$(\Delta_1) : (x - 2) - 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0$. Đó là đường thẳng song song với l_1

$(\Delta_2) : 5(x - 2) + (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 11 = 0$. Đó là đường thẳng song song với l_2

Cách 2 :

Phương trình đường thẳng (Δ') qua A có dạng $\lambda(x - 2) + \mu(y - 1) = 0$ (1)
với $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Vectơ pháp tuyến của (Δ'), (Δ) theo thứ tự lần lượt là $\vec{n'} = (\lambda; \mu)$, $\vec{n} = (2; 3)$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng (Δ) và (Δ') ta có

$\cos\alpha = \dfrac{|2\lambda + 3\mu|}{\sqrt{(2^2+3^2)(\lambda^2+\mu^2)}} = \dfrac{|2\lambda+3\mu|}{\sqrt{13(\lambda^2+\mu^2)}}$. Hai đường thẳng (Δ) và (Δ') hợp với nhau một góc $45^0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos45^0 \Leftrightarrow \dfrac{|2\lambda+3\mu|}{\sqrt{13(\lambda^2+\mu^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2(2\lambda + 3\mu)^2 = 13(\lambda^2 + \mu^2) \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 24\lambda\mu - 5\mu^2 = 0 \qquad (2)$

Do $\mu \neq 0$, đặt $\mu = \lambda t$, ta có (2) trở thành $\lambda^2(5 - 24t - 5t^2) = 0$

$\overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow} 5t^2 + 24t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left\{t = -5,\ t = \dfrac{1}{5}\right\}$

- Với $t = -5$ ta có $\mu = -5\lambda$. Chọn $\lambda = 1$, có $\mu = -5$, thay vào (1) có
$$(x-2) - 5(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0$$
- Với $t = \dfrac{1}{5}$ ta có $\mu = \dfrac{1}{5}\lambda$. Chọn $\lambda = 5$, có $\mu = 1$, thay vào (1) có
$$5(x-2) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow 5x + y - 11 = 0$$

Lời bình

Bạn cần biết :

- *Đường phân giác của một góc là tập hợp các điểm cách đều các đường thẳng chứa hai cạnh của góc ấy .*
- *Đường thẳng tạo với hai cạnh của một góc những góc bằng nhau là đường thẳng song song với đường phân giác của góc ấy.*

Thí dụ 7 (Đ56)

Lập phương trình đường thẳng qua $P(2; -1)$ sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng $(\Delta_1): 2x - y + 5 = 0$, $(\Delta_2): 3x + 6y - 1 = 0$ tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Lời giải

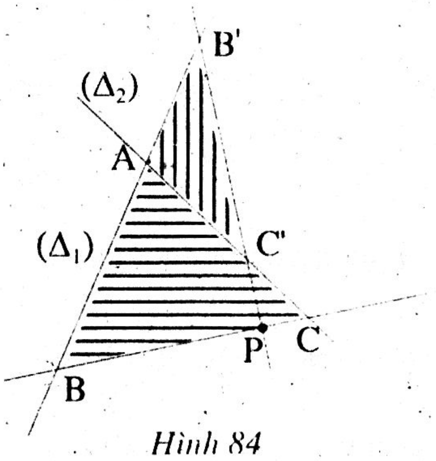
Cách 1 (sử dụng công thức đường phân giác). (h84)

- Phương trình các đường phân giác $l_{1,2}$ của góc tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2) là

$$\frac{2x - y + 5}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \pm\frac{3x + 6y - 1}{\sqrt{3^2 + 6^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - y + 5}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3x + 6y - 1}{3\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (l_1):\ 3x - 9y + 16 = 0 \\ (l_2):\ 9x + 3y + 14 = 0 \end{array}\right.$$



Hình 84

- Phương trình đường thẳng (d_1) qua P và $(d_1)//(l_1)$ là $3(x-2) - 9(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 9y - 15 = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 5 = 0$

- Phương trình đường thẳng (d_2) qua P và $(d_2)//(l_2)$ là $9(x-2) + 3(y+1) = 0$

$\Leftrightarrow 9x + 3y - 15 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$

- Rõ ràng đường thẳng (d) qua P tạo với (Δ_1), (Δ_2) một tam giác cân có đỉnh $A=(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$ khi và chỉ khi (d) song song với đường phân giác $l_{1,2}$ nói ở trên. Bởi vậy, phương trình các đường thẳng mà ta cần tìm là :

$$(d_1) : x-3y-5=0,\ (d_2) : 3x+y-5=0$$

Cách 2 (Dùng công thức tính góc).

- Phương trình đường thẳng (d) qua P(2; − 1) có dạng

$\lambda(x-2)+\mu(y+1)=0\ \ (\lambda^2+\mu^2>0)$ (1)

Gọi α, β theo thứ tự là góc của (d) lần lượt hợp với (Δ_1), (Δ_2).

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{|2\lambda-\mu|}{\sqrt{(2^2+(-1)^2)(\lambda^2+\mu^2)}}$, $\cos\beta = \dfrac{|\lambda+2\mu|}{\sqrt{(1^2+2^2)(\lambda^2+\mu^2)}}$.

- $\alpha=\beta \Leftrightarrow \dfrac{|2\lambda-\mu|}{\sqrt{(2^2+(-1)^2)(\lambda^2+\mu^2)}} = \dfrac{|\lambda+2\mu|}{\sqrt{(1^2+2^2)(\lambda^2+\mu^2)}}$

$$\Leftrightarrow 2\lambda-\mu=\pm(\lambda+2\mu) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=3\mu\\ 3\lambda=-\mu\end{array}\right.$$

Với $\lambda=3\mu$, chọn $\lambda=3$, $\mu=1$ thay vào (1) có $3(x-2)+(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+y-5=0$

Với $3\lambda=-\mu$, chọn $\lambda=1$, $\mu=-3$ thay vào (1) có $(x-2)-3(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x-3y-5=0$

Kết luận : Phương trình các đường thẳng mà ta cần tìm là :

$$(d_1) : x-3y-5=0,\ (d_2) : 3x+y-5=0$$

Chú ý : Khi tính cosβ, ta đã sử dụng vectơ pháp tuyến của (Δ_2) là $\overrightarrow{n_2}=(1;2)$ thay cho vectơ $\overrightarrow{n_{\Delta 2}}=(3;6)$

Kĩ thuật 5. *Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp chùm.*

(Theo dõi thí dụ dưới đây)

Thí dụ 8

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(\Delta) : 2x+y-3=0$, $(\Delta') : x-4y+1=0$ và

1) (d) đi qua A=(− 1; 2)
2) $(d)//(\Delta_1)$ có phương trình $4x+3y-20=0$. (1)
3) $(d)\perp(\Delta_2)$ có phương trình $x+y+3=0$

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) đi qua giao điểm của hai đường thẳng (Δ) và (Δ') có dạng $\lambda(2x+y-3)+\mu(x-4y+1)=0,\ \lambda^2+\mu^2>0$ (2)

1) Đường thẳng (d) đi qua A ⇔ Toạ độ điểm A là nghiệm của phương trình (1) hay $\lambda[2(-1)+2-3]+\mu[(-1)-4.2+1]=0 \Leftrightarrow 3\lambda+8\mu=0 \Leftrightarrow 3\lambda-8\mu$

Chọn $\lambda=8$, $\mu=-3$ thay vào (2) ta có $8(2x+y-3)-3(x-4y+1)=0$

$\Leftrightarrow\ 13x+20y-27=0.$

Đó là phương trình đường thẳng nối A với giao điểm của (Δ) và (Δ').

2) Ta thấy rằng toạ độ điểm A không là nghiệm của phương trình (1) nên tồn tại đường thẳng qua A và $(d)//(\Delta_1)$.

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (2\lambda+\mu)x+(\lambda-4\mu)y-3\lambda+\mu=0$ (3)

Vectơ pháp tuyến của (d) là $\vec{n}=(2\lambda+\mu;3\lambda-4\mu)$

Vectơ pháp tuyến của (Δ_1) là $\vec{n_1}=(4;3)$

Đường thẳng $(d)//(\Delta_1) \Rightarrow \vec{n}$ cùng phương với $\vec{n_1} \Leftrightarrow \frac{2\lambda+\mu}{4}=\frac{3\lambda-4\mu}{3}$

$\Leftrightarrow 3(2\lambda+\mu)-4(3\lambda-4\mu)=0 \Leftrightarrow 18\lambda+19\mu=0 \Leftrightarrow 18\lambda=-19\mu$.

Chọn $\lambda=19$, $\mu=-18$ thay vào (3) có

$$(2.19-18)x+(19+4.18)y-3.19-18=0 \Leftrightarrow 20x+91y-75=0$$

Đó là phương trình đường thẳng (d) mà ta phải tìm.

3) Đường thẳng $(d)\perp(\Delta_1) \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n_1} \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n_1}=0$

$\Leftrightarrow 4(2\lambda+\mu)+3(3\lambda-4\mu)=0 \Leftrightarrow 17\lambda-8\mu=0$. Chọn $\lambda=8$, $\mu=17$, thay vào (2) ta có $(2.8+17)x+(8-4.17)y-3.8+17=0 \Leftrightarrow 33x-43y+17=0$

Đó là phương trình đường thẳng (d) mà ta phải tìm.

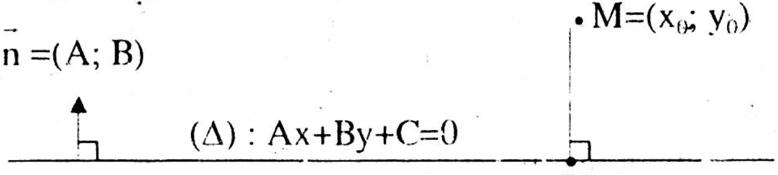
Chú ý.

Khi tìm đường thẳng (d) qua A và (d) song song với đường thẳng (Δ), bạn đừng quên kiểm tra vị trí tương đối của A và (Δ). Nếu $A\in(\Delta)$ thì bài toán không có lời giải.

Bài toán 2

Xác định hình chiếu điểm của một điểm trên một đường thẳng.

Kỹ thuật 6. *Xác định hình chiếu điểm của một điểm $M=(x_0;y_0)$ trên đường thẳng (Δ) : $Ax+By+C=0$.*



Hình 85

Bạn lựa chọn một trong các cách sau đây.

Cách 1 : • Phương trình đường thẳng $(\Delta')\perp(\Delta)$ là $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$

• H là hình chiếu của M trên (Δ) $\Leftrightarrow H=(\Delta)\cap(\Delta') \Leftrightarrow$ Toạ độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases}Ax+By+C=0\\B(x-x_0)-A(y-y_0)=0\end{cases}$ (1)

• Giải hệ (1) để tìm toạ độ H.

Cách 2 :

• Biến đổi phương trình tổng quát của đường thẳng về phương trình tham số

Giả sử $Ax+By+C=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha+Bt\\y=\beta-At\end{cases}$ $(t\in R)$. Gọi H : $\begin{cases}x_H=\alpha+Bt\\y_H=\beta-At\end{cases}$ – là một điểm bất kì thuộc (Δ). (2)

$$MH^2 = (x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 = (\alpha + Bt - x_0)^2 + (\beta - At - y_0)^2 \qquad (3)$$

Khai triển (3) luôn có $MH^2 = f(t) = at^2 + bt + c$ (với $a > 0$)

Tam thức bậc hai $f(t) = at^2 + bt + c$ đối với t luôn đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -\dfrac{b}{2a}$

H là hình chiếu của M trên (Δ) ⇔ MH đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ MH^2 đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ $t = -\dfrac{b}{2a}$

Thay $t = -\dfrac{b}{2a}$ vào (2) ta có $\begin{cases} x_H = \alpha - \dfrac{bB}{2a} \\ y_X = \beta - \dfrac{bA}{2a} \end{cases}$. Đó là toạ độ điểm H.

Chú ý :

1) Khi đó khoảng cách từ M đến (Δ) là $d(M,(\Delta)) = \sqrt{f(-\dfrac{b}{2a})}$

2) Thường sử dụng cách 2 khi đường thẳng có phương trình tham số.

Thí dụ 9

Xác định hình chiếu của điểm $M=(1;-1)$ lần lượt trên hai đường thẳng

$(\Delta_1): 3x+y-32=0$ và $(\Delta_2)\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \end{cases}, t \in R$

Lời giải

1) Xác định hình chiếu của điểm M trên đường thẳng (Δ_1).

- Phương trình đường thẳng $(\Delta') \perp (\Delta)$ là $1.(x - x_M) - 3(y - y_M) = 0$ hay $1.(x-1) - 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 4 = 0$
- H là hình chiếu của M trên (Δ) ⇔ $H = (\Delta) \cap (\Delta')$ ⇔ Toạ độ H là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + y - 32 = 0 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy H=(10; 2)

2) Xác định hình chiếu của điểm M trên đường thẳng (Δ_2).

Gọi H: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \end{cases}$ (1)- là một điểm bất kì trên (Δ)

Ta có $MH^2 = (1 + 2t - 1)^2 + (-2 + t + 1)^2 = 4t^2 + (t-1)^2 = 5t^2 - 2t + 1$.

H là hình chiếu của M trên (Δ_2) ⇔ MH^2đạt giá trị nhỏ nhất <-> MH^2 đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ $f(t) = 5t^2 - 2t + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất trên R ⇔ $t = -\dfrac{b'}{a} = \dfrac{1}{5}$.

Thay $t = \dfrac{1}{5}$ vào (1) có $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{2}{5} \\ y = -2 + \dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = -\dfrac{9}{5} \end{cases}$. Vậy $H = \left(\dfrac{7}{5}; -\dfrac{9}{5}\right)$

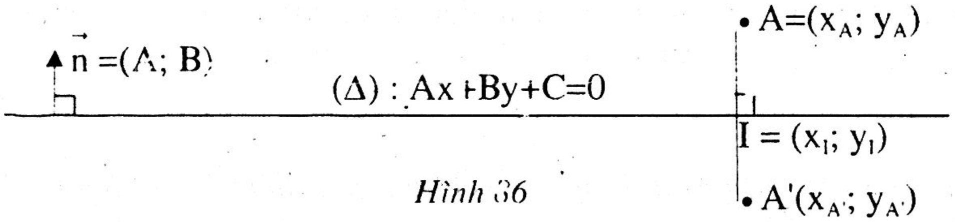
Bài toán 3

Xác định điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng cho trước.

Kỹ thuật 7. *Xác định điểm A' đối xứng với điểm A* $(x_A; y_A)$ *qua đường thẳng* (Δ) : $Ax+By+C=0$ *cho trước.*

- (h 86). Xác định điểm I là hình chiếu của A trên (Δ). (Dùng kĩ thuật 6)
- A' đối xứng với A qua (Δ) ⇔ I là trung điểm của A'A

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + x_A = 2x_I \\ y_{A'} + y_A = 2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A \\ y_{A'} = 2y_I - y_A \end{cases}$$



Hình 86

Thí dụ 10

Xác định điểm A' đối xứng với điểm A=(3; 1) qua đường thẳng

(Δ) : $x - 2y + 9 = 0$

Lời giải

- Đường thẳng $(\Delta')\perp(\Delta)$ có phương trình là $2(x-3)+1(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 2x+y-7=0$

- Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ). Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-2y+9=0 \\ 2x+y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ hay } I=(1; 5)$$

- Điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng (Δ) ⇔ I là trung điểm AA'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} + x_A = 2x_I \\ y_{A'} + y_A = 2y_I \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x_{A'} + 3 = 2.1 \\ y_{A'} + 1 = 2.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 \\ y_{A'} = 9 \end{cases}. \text{ Vậy } A'=(-1; 9)$$

III. CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG VẬN DỤNG

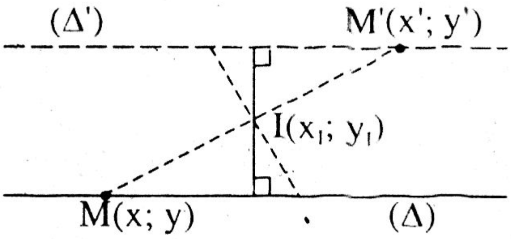
Bài toán 4

Viết phương trình đường thẳng (Δ') đối xứng với đường thẳng (Δ) cho trước qua điểm I cho trước.

Kỹ thuật 8. *Viết phương trình đường thẳng* (Δ') *đối xứng với đường thẳng* (Δ): $Ax+By+C=0$ *cho trước qua điểm* $I(x_I; y_I)$ *cho trước.*

Cách 1 (h 87):

- Hai điểm M=(x; y) và M'(x'; y') đối xứng nhau qua $I(x_I; y_I)$



Hình 87

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2x_1 \\ y + y' = 2y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_1 - 2x' \\ y = 2y_1 - 2y' \end{cases}$$

Điểm $M=(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow Ax+By+C=0$
$\Leftrightarrow A(2x_1 - x') + B(2y_1 - y') + C = 0$
$\Leftrightarrow Ax'+By'+C=2(Ax_1+By_1+C)$
$\Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng có phương trình:
$Ax+By+C=2(Ax_1+By_1+C)$.

Đó là phương trình đường thẳng (Δ') mà ta phải tìm.

Tóm lại phương trình đường thẳng (Δ') đối xứng với đường thẳng (Δ) : $Ax + By + C = 0$ cho trước qua điểm $I(x_1; y_1)$ cho trước có phương trình là

$$Ax + By + C = 2(Ax_1 + By_1 + C)$$

Cách 2 :

(Nhận xét : (Δ') và (Δ) đối xứng với nhau qua điểm I ⇒ (Δ')//(Δ), I và (Δ') ở cùng phía so với (Δ) và khoảng cách từ (Δ') đến (Δ) bằng hai lần khoảng cách từ I đến (Δ). Bởi thế có lời giải sau).

Kí hiệu $f(x; y) = Ax + By + C$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng (Δ) là $d(I,(\Delta)) = \dfrac{|f(x_1,y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Gọi M(x'; y') là một điểm bất kì trên mặt phẳng.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng (Δ) là $d(M,(\Delta)) = \dfrac{|f(x',y')|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$M \in (\Delta') \Leftrightarrow \begin{cases} d(M,(\Delta)) = 2d(I,(\Delta)) \\ \text{và I ở cùng một phía so với } (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(M,(\Delta)) = 2d(I,(\Delta)) \\ f(M).f(I) > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow f(x', y') = 2f(x_1, y_1) \Leftrightarrow Ax' + By' + C = 2(Ax_1 + By_1 + C) \Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng có phương trình $Ax + By + C = 2(Ax_1 + By_1 + C)$.

Đó là phương trình đường thẳng (Δ') mà ta phải tìm.

Thí dụ 11

Viết phương trình đường thẳng (Δ') đối xứng với đường thẳng (Δ) : $3x - 5y + 2 = 0$ cho trước qua điểm $I(1; -2)$.

Lời giải

- Hai điểm $M = (x; y)$ và $M'(x'; y')$ đối xứng nhau qua $I(1; -2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 2x_1 \\ y + y' = 2y_1 \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x + x' = 2.1 \\ y + y' = 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2x' \\ y = -4 - 2y' \end{cases}$$

Điêm $M = (x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow 3(2 - x') + 5(4 + 2y') + 2 = 0$
$\Leftrightarrow 3x' + 10y' + 28 = 0 \Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng có phương trình $33x + 10y + 28 = 0$.

Đó là phương trình đường thẳng (Δ') mà ta phải tìm.

Bài toán 5

Viết phương trình đường phân giác trong của tam giác

Kỹ thuật 9. *Cho tam giác ABC. Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ấy.*

Giả sử phương trình các cạnh (AB), (AC) theo thứ tự là

$$f_1(x, y) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0,\ f_2(x, y) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0.$$

Bước 1:

Viết phương trình các đường phân giác tạo bởi hai cạnh (AB), (AC)

(Sử dụng công thức $\dfrac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = \pm \dfrac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$)

Gọi (l_1) là đường phân giác $f_1(x, y) = \dfrac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} + \dfrac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}} = 0$

Gọi (l_2) là đường phân giác $f_2(x, y) = \dfrac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} - \dfrac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}} = 0$

Công thức $\dfrac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}} = \pm \dfrac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$ *cho ta đồng thời hai đường phân giác trong và ngoài của cùng một góc. Nếu đường này là phân giác trong thì đường còn lại là phân giác ngoài. Để phân biệt được đường nào là phân giác trong (ngoài) bước tiếp theo của kỹ thuật là :*

Bước 2: (Xét dấu để kết luận).

Đường thẳng (l_i) ($i \in 1, 2$) là phân giác trong của góc A (của ΔABC)

$\Leftrightarrow$ (l_i) cắt đoạn thẳng BC $\Leftrightarrow$ $f_i(B).f_i(C) < 0$. Do vậy

Tính $f_1(B)$, $f_1(C)$.

* Nếu $f_1(B).f_1(C) < 0$ thì $f_1(x, y) = 0$ là phương trình đường phân giác trong, $f_2(x, y) = 0$ là phương trình đường phân giác ngoài của góc A

* Nếu $f_1(B).f_1(C) > 0$ thì $f_1(x, y) = 0$ là phương trình đường phân giác ngoài, $f_2(x, y) = 0$ là phương trình đường phân giác trong của góc A

Tương tự bạn cũng có thể tính $f_2(B)$, $f_2(C)$ để kết luận.

Thí dụ 12

Tam giác ABC có A = (2; 0), B = (0; 4), C = (4; –1)

Viết phương trình các cạnh AB, AC, và đường phân giác trong của góc A.

Lời giải

- Phương trình cạnh (AB) là $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$
- Phương trình cạnh (AC) là $\dfrac{x - x_C}{x_A - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_A - y_C}$ hay $\dfrac{x - 1}{2 - 4} = \dfrac{y + 1}{0 + 1}$

$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$

- Phương trình các đường phân giác góc A là

$$\frac{2x+y-4}{\sqrt{2^2+1^2}}=\pm\frac{x+2y+1}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x,y)=x-y-5=0\\ f_2(x,y)=x+y-1=0\end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases} f_1(B)=-9<0\\ f_1(C)=2>0\end{cases}$ ⇒ Hai điểm B và C ở khác phía đối với đường thẳng $f_1(x, y) = x-y-5=0 \Rightarrow f_1(x, y) = x-y-5=0$ là đường phân giác trong góc A của ΔABC.

Thí dụ 13 (Đề 16)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba đường thẳng

$(\Delta_1) : 3x + 4y - 6 = 0$, $(\Delta_2): 4x + 3y - 1 = 0$, $(\Delta_3) : y = 0$.

Gọi $A = (\Delta_1)\cap(\Delta_2)$, $B = (\Delta_2)\cap(\Delta_3)$, $C = (\Delta_3)\cap(\Delta_1)$.

1) Viết phương trình phân giác trong của góc A của ΔABC và tính diện tích tam giác đó.

2) Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

Lời giải

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+4y-6=0\\ 4x+3y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\\ y=3\end{cases}$ hay $A=(-2; 3)$

Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x+3y-1=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{4}\\ y=0\end{cases}$ hay $B=\left(\dfrac{1}{4};\ 0\right)$

Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+4y-6=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\\ y=0\end{cases}$ hay $C = (2; 0)$

1) *Viết phương trình phân giác trong của góc A và tính diện tích tam giác.*

- Phương trình các đường phân giác góc A là

$$\frac{3x+4y-6}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x+3y-1}{\sqrt{3^2+4^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x,y):=x-y+5=0\\ f_2(x,y):=x+y-1=0\end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases} f_1(B)=-\dfrac{19}{5}<0\\ f_1(C)=-3<0\end{cases}$ ⇒ Hai điểm B và C ở cùng phía đối với đường thẳng $f_1(x, y) = x - y - 5 = 0 \Rightarrow f_1(x, y) = x - y - 5 = 0$ là đườngphân giác ngoài góc A. Đường phân giác trong góc A phải tìm là $f_2(x, y) = x + y -1= 0$.

- *Tính diện tích tam giác.*

Cách 1: Hai điểm B và C đều thuộc (Δ_3) : y=0 suy ra

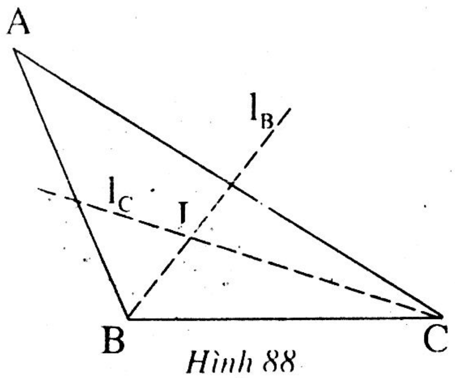
$BC = |x_C - x_B| = 2-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$. Độ dài đường cao $AH=|y_A| = 3$

Diện tích ΔABC là $S=\dfrac{1}{2}BC.AH=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{4}\cdot 3=\dfrac{21}{8}$. Vậy $S=\dfrac{21}{8}$ (đvdt)

Cách 2: $S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_A - x_B & x_A - x_C \\ y_A - y_B & y_A - y_C \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -2 - \frac{1}{4} & -2-2 \\ 3-0 & 3-0 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -\frac{9}{4} & -4 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix}$

$= \frac{3}{8}\begin{Vmatrix} -9 & -16 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{3}{8}(-9+16) = \frac{21}{8}$. Vậy $S = \frac{21}{8}$ (đvdt)

2) *Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.*



Hình 88

- Phương trình các đường phân giác góc B là

$$\frac{4x + 3y - 1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm\frac{y}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow 4x + 3y - 1 = \pm 5y$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f_1(x,y) = 4x - 2y - 1 = 0 \\ f_2(x,y) = 4x + 8y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases} f_1(A) = -15 < 0 \\ f_1(C) = 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hai điểm A và C ở khác phía đối với đường thẳng $f_1(x, y) = 4x - 2y - 1 = 0$

$\Rightarrow f_1(x, y) = 4x - 2y - 1 = 0$ là đường phân giác trong l_B của góc B.

- Phương trình các đường phân giác góc C là $\frac{3x + 4y - 6}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm\frac{y}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y - 6 = \pm 5y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h_1(x,y) = 4x - 2y - 6 = 0 \\ h_2(x,y) = 4x + 8y - 6 = 0 \end{array}\right.$$

Ta có $\begin{cases} h_1(A) = -22 < 0 \\ h_1(B) = -5 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hai điểm A và B ở cùng phía đối với đường thẳng $h_1(x, y) = 4x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow h_1(x, y) = 4x - 2y - 6 = 0$ là đường phân giác ngoài góc C. Đường phân giác trong l_C của góc C là $h_2(x, y) = 4x + 8y - 6 = 0$.

- Gọi $I = l_B \cap l_C \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x - 2y - 1 = 0 \\ 4x + 8y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$ hay $I = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Do $(\Delta_3): y = 0$ nên khoảng cách từ I đến (Δ_3) là $d = |y_1| = \frac{1}{2}$.

Suy ra $r = d = \frac{1}{2}$.

Với mọi điểm M=(x, y) ta có $IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$.

M thuộc đường tròn nội tiếp ΔABC $\Leftrightarrow IM^2 = r^2$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Đó là phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC.

IV. CÁC BÀI TOÁN PHỐI HỢP NHIỀU KĨ NĂNG

Thí dụ 14 (Đề 3)

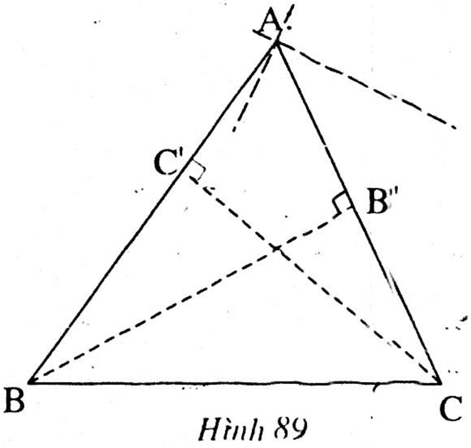
Cho tam giác ABC có đỉnh A(2; 2), đường cao BB' : $9x - 3y - 4 = 0$, đường cao CC': $x+y-2=0$.

1) Viết phương trình các cạnh của tam giác.

2) Lập phương trình đường thẳng (d) qua A tạo một góc 45^0 với đường thẳng AC.

Lời giải

1) *Phương trình các cạnh.*



Hình 89

- $AB \perp CC' \Rightarrow$ phương trình cạnh AB là $(x-2)-(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y=0$
- $AC \perp BB' \Rightarrow$ phương trình cạnh AC là $3(x-2) + 9(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$
- $B = (AB) \cap (BB') \Rightarrow$ Toạ độ B là nghiệm

của hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{2}{3}$

hay $B = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

- $C = (AC) \cap (CC') \Rightarrow$ Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ hay $C = (-1; 3)$

- Phương trình cạnh BC là $\dfrac{x - x_C}{x_B - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_B - y_C}$ hay $\dfrac{x+1}{\frac{2}{3}+1} = \dfrac{y-3}{\frac{2}{3}-3}$

$\Leftrightarrow 7(x+1) = -5(y-3) \Leftrightarrow 7x + 5y - 8 = 0$

Tóm lại, phương trình các cạnh của ΔABC là :

(AB) : $x - y = 0$, (AC) : $x + 3y - 8 = 0$, (BC) : $7x + 5y - 8 = 0$

2) *Phương trình đường thẳng qua A tạo một góc 45^0 với đường thẳng AC.*

Cách 1:

- Gọi (Δ) là đường thẳng có phương trình $3x - y = 0$. Rõ ràng $(\Delta) \perp (AC)$

Các đường phân giác $l_{1,2}$ của góc tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (AC) có phương trình là :

$$\frac{3x - y}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \pm \frac{x + 3y - 8}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (l_1):\ x - 2y + 4 = 0 \\ (l_2):\ 2x + y - 4 = 0 \end{array}\right.$$

- Đường thẳng (d) qua A tạo một góc 45^0 với đường thẳng AC $\Leftrightarrow$ (d) song song với (l_1) hoặc (l_2) suy ra có hai đường thẳng (d) là :

* $(d)//(l_1)$: $(x-2) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

* $(d)//(l_2)$: $2(x-2) + (y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$

Cách 2:

• Phương trình đường thẳng (d) qua A có dạng $\lambda(x - 2) + \mu(y - 2) = 0$ (1) với $\lambda^2 + \mu^2 > 0$. Gọi α là góc giữa (d) và cạnh AC, ta có

$$\cos\alpha = \frac{|\lambda + 3\mu|}{\sqrt{(1^2 + 3^2)(\lambda^2 + \mu^2)}} = \frac{|\lambda + 3\mu|}{\sqrt{10.(\lambda^2 + \mu^2)}}.$$

• Góc giữa (d) và cạnh AC bằng $\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos 45^0$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda + 3\mu|}{\sqrt{10.(\lambda^2 + \mu^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow (\lambda + 3\mu)^2 = 5(\lambda^2 + \mu^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda\mu - 2\mu^2 = 0 \qquad (2)$$

Thấy rằng $\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ trái với điều kiện $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, nên $\lambda\mu = 0$ không thích hợp. Với $\lambda\mu \neq 0$, đặt $\lambda = t\mu$, ta có (2) $\Leftrightarrow \lambda^2(2t^2 - 3t - 2 = 0$

$$\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \left[t = -\frac{1}{2};\ t = 2 \right]$$

Với $t = -\frac{1}{2}$ có $\lambda = -\frac{\mu}{2}$. Chọn $\lambda = 1$, $\mu = -2$, thay vào (1) có $(x-2) - 2(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$

Với $t = 2$ có $\lambda = 2\mu$. Chọn $\lambda = 2$, $\mu = 1$ thay vào (1) có $2(x - 2) + 1(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

Thí dụ 15 (Đề 98, 125)

Cho hình vuông ABCD có đỉnh A(−4; 5) và một đường chéo đặt trên đường thẳng (Δ) : $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông đó.

Lời giải

Thay toạ độ đỉnh A vào phương trình đường thẳng (Δ) có

$7(-4) - 5 + 8 = -25 \neq 0$ suy ra $A \notin (\Delta)$ còn B và C thuộc đường thẳng (Δ).

• Phương trình đường thẳng (d) qua A có dạng $\lambda(x + 4) + \mu(y - 5) = 0$ (1) với $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ và $\vec{n} = (\lambda; \mu)$ là một vectơ pháp tuyến.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (Δ) là

$\vec{n'} = (7; -1)$.

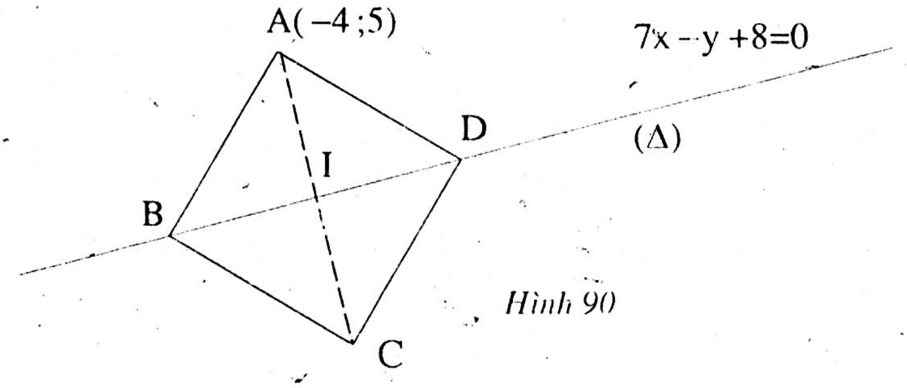
• $(d) \perp (\Delta) \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{n'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 7\lambda - \mu = 0$.

Chọn $\lambda = 1$, $\mu = 7$ thay vào (1) có

$(x + 4) + 7(y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow x + 7y - 31 = 0$.



Hình 90

Đó là phương trình đường chéo AC. Ta kí hiệu đường chéo AC là (Δ'). (*)

- Phương trình các đường phân giác $l_{1,2}$ của góc tạo bởi (Δ) và (Δ') là

$$\frac{7x-y+8}{\sqrt{7^2+1^2}} = \pm\frac{x+7y-31}{\sqrt{7^2+1^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(l_1):\ 6x-8y+39=0\\ (l_2):\ 8x+6y-23=0\end{array}\right.$$

- Rõ ràng AB, AD là các đường thẳng đi A và lần lượt song song với (l_1), (l_2) nên :

Phương trình cạnh AB là $6(x + 4) - 8(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 32 = 0$

Phương trình cạnh AD là $8(x + 4) + 6(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 1 = 0$

Gọi $I(x_I, y_I)$ là tâm của hình vuông ABCD ta có $I = (\Delta)\cap(\Delta')$, suy ra toạ độ I là

nghiệm của hệ $\begin{cases}7x-y+8=0\\ x+7y+31=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I=-\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

- C là đỉnh hình vuông ABCD $\Leftrightarrow$ I là trung điểm AC

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_C+x_A=2x_I\\ y_C+y_A=2y_I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C-4=-1\\ y_C+5=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_C=3\\ y_C=4\end{cases}$. Vậy C=(3; 4).

- BD//AC nên phương trình cạnh BD là $4(x - 3) + 3(y - 4) = 0$
$\Leftrightarrow 4x + 3y - 24 = 0$.
- CD//AB nên phương trình cạnh CD là $3(x - 3) - 4(y - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0$.

Tóm lại : Phương trình đường chéo AC : $x + 7y - 31= 0$.

Phương trình các cạnh (AB) : $3x - 4y + 32 = 0$, (AC): $4x + 3y + 1 = 0$; (BD): $4x + 3y - 24 = 0$; (CD): $3x - 4y + 7 = 0$.

Cách 2 (Tiếp nối từ (*)):

Gọi α là góc giữa (Δ) và (Δ') ta có

$$\cos\alpha=\frac{|7\lambda-\mu|}{\sqrt{7^2+1^2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{|7\lambda-\mu|}{5\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \qquad (2)$$

Đường thẳng (d) chứa các cạnh hình vuông AB, AC $\Leftrightarrow \alpha=45^0$. Thay vào (2) có

$$\cos45^0=\frac{|7\lambda-\mu|}{5\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|7\lambda-\mu|}{5\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}$$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{\lambda^2+\mu^2} = |7\lambda-\mu| \Leftrightarrow 25(\lambda^2+\mu^2) = (7\lambda+\mu)^2 \Leftrightarrow 24\lambda^2 + 14\lambda\mu - 24\mu^2 = 0$

$\Leftrightarrow 12\lambda^2 + 7\lambda\mu - 12\mu^2 = 0$ (3)

Do $\mu \neq 0$, đặt $\mu = \lambda t$, ta có (3) trở thành $\lambda^2(12t^2 + 7t - 12) = 0$

$\overset{\lambda\neq0}{\Leftrightarrow} 12t^2 + 7t - 12 \Leftrightarrow \left\{t=-\dfrac{4}{3},\ t=\dfrac{3}{4}\right\}$

- Với $t=-\dfrac{4}{3}$ ta có $\mu=-\dfrac{4}{3}\lambda$. Chọn $\lambda = 3$, có $\mu = -4$, thay vào (1) có

$3(x + 4) - 4(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 32 = 0$. Đó là phương trình cạnh AB.

- Với $t=\dfrac{3}{4}$ ta có $\mu=\dfrac{3}{4}\lambda$. Chọn $\lambda = 4$, có $\mu = 3$, thay vào (1) có

$4(x + 4) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + 1 = 0$. Đó là phương trình cạnh AC (4)

(Gọi (Δ') là phương trình chứa đường chéo AD. Rõ ràng (Δ') qua A và vuông góc với (Δ) nên (Δ') có phương trình $f(x, y) = (x + 4) + 7(y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow f(x, y) = x + 7y - 31 = 0$.

]Phần còn lại trình bày như cách 1.

Thí dụ 16 (Đề 84)

Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $B = (2; -1)$, đường cao AH : $3x - 4y + 27 = 0$, đường phân giác góc C : $x + 2y - 5 = 0$

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của đường cao (AH) là $\vec{n} = (3; -4)$

- BC⊥AH suy ra cạnh BC nhận $\vec{n'} = (4;3)$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra cạnh BC có phương trình là $4(x - 2) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$
- Ta có $C = (BC) \cap (l_C) \Rightarrow$ toạ độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

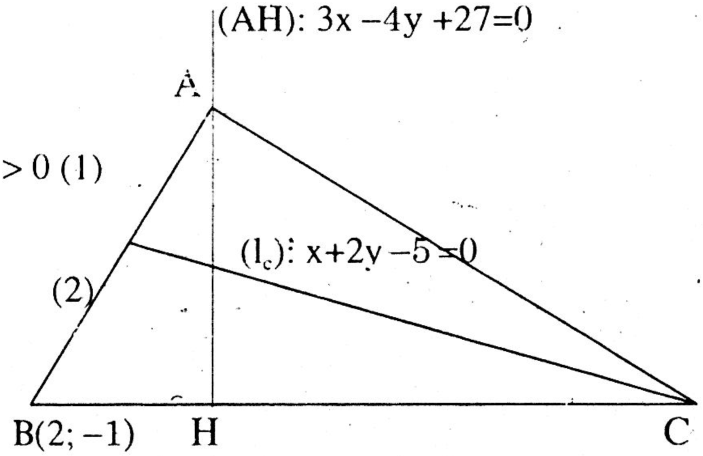
$\Leftrightarrow (x=-1;\ y=3)$ hay $C = (-1; 3)$

- Phương trình cạnh AC là

$\lambda.(x - 1) + \mu(y - 3) = 0$ với $\lambda^2 + \mu^2 > 0$ (1)

Do AC ≠ BC nên phải có :

$$\frac{\lambda}{4} \neq \frac{\mu}{3}$$



Hình 91

Gọi α, β theo thứ tự là góc của đường phân giác l_C tạo với các cạnh CB, CA. Ta có

$$\cos\alpha = \frac{|1.4 + 2.3|}{\sqrt{(1^2 + 2^2)(4^2 + 3^2)}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = \frac{|1.\lambda + 2.\mu|}{\sqrt{(1^2 + 2^2)(\lambda^2 + \mu^2)}} = \frac{|\lambda + 2\mu|}{\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

- (l_C) là đường phân giác góc C $\Leftrightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{|\lambda + 2\mu|}{\sqrt{5}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$

$$\Leftrightarrow 4(\lambda^2 + \mu^2) = (\lambda + 2\mu)^2 \Leftrightarrow 3\lambda^2 = 4\lambda\mu \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ 3\lambda = 4\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \dfrac{\lambda}{4} = \dfrac{\mu}{3} \text{ (loại do (2))} \end{array}\right.$$

Với $\lambda = 0$ ($\mu \neq 0$) thay có (1) $\Leftrightarrow y = 3$. Đó là phương trình cạnh AC.

- $A = (AH) \cap (AC) \Leftrightarrow$ Toạ độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 27 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hay } A = (-5; 3).$$

- Phương trình cạnh AB với A=(−5; 3), B=(2; −1) là $\dfrac{x+5}{2+5} = \dfrac{y-3}{-1-3}$

$\Leftrightarrow$ $4x + 7y - 1 = 0$

Lời bình

Bạn đọc có thể dùng phương trình chùm đường thẳng để viết phương trình các cạnh AC, AB.

Bài toán 6.

Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau tại I, M là một điểm không nằm trên hai đường thẳng đó và k là một số thực cho trước. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (Δ_1) tại A, cắt (Δ_2) tại B sao cho $\overline{MA} = k.\overline{MB}$

CÁCH GIẢI

Cách 1(h92.1, h92.1):

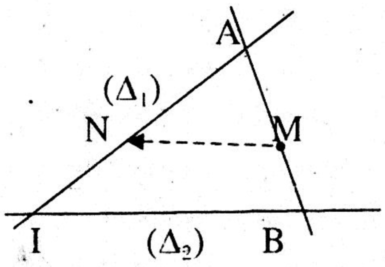
1) Qua M kẻ đường thẳng $(\Delta')//(\Delta_2)$.

{Viết phương trình đường thẳng qua M và song song với (Δ_2)}

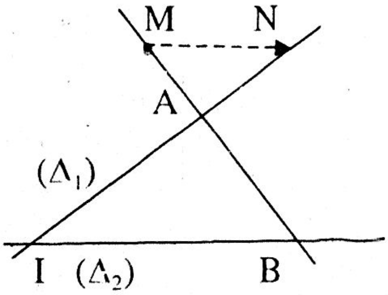
2) Dựng $N = (\Delta_1)\cap(\Delta')$

{Giải hệ phương trình tương ứng}

3) Trên (Δ_1) lấy A sao cho $\overline{NA} = k.\overline{NB}$



Hình 92.1



Hình 92.2

4) Viết phương trình đường thẳng nối hai điểm A và M

Cách 2 :

1) Dựng J sao cho $\overline{MI} = k.\overline{MJ}$

2) Qua M kẻ đường thẳng $(\Delta_1)//(\Delta_2)$.

{Viết phương trình đường thẳng qua M và song song với (Δ_2)}

3) Dựng $A=(\Delta_1)\cap(\Delta')$

{Giải hệ phương trình tương ứng}

4) Viết phương trình đường thẳng nối hai điểm A và M

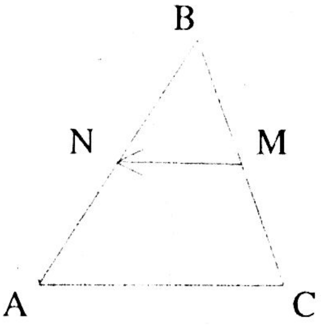
Đặc biệt : Khi $k = -1$, có thể viết phương trình (Δ_1) nhờ phép đối xứng tâm mà không cần tìm điểm J.

Thí dụ 17 (Đề 32, 90)

Cho tam giác ABC có M(−1; 1) là trung điểm của một cạnh, hai cạnh của tam giác có phương trình $x + y - 2 = 0$, $2x + 6y + 3 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh của ΔABC.

Lời giải

Gọi AB, AC là cạnh có phương trình theo thứ tự là $x + y - 2 = 0$, $2x + 6y + 3 = 0$. Thấy rằng toạ độ điểm $M(-1; 1)$ không là nghiệm của các phương trình trên suy ra M phải là trung điểm của BC.



Hình 93

- Ta có toạ độ đỉnh A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 6y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{15}{4}; y = -\frac{7}{4} \right)$$

hay $A = \left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4} \right)$

- Gọi N là trung điểm AB. Ta có MN//AC suy ra đường thẳng qua MN có phương trình là :

$2(x + 1) + 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 2 = 0$

- Toạ độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 2x + 6y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{4}; y = -\frac{3}{4} \right)$

hay $N = \left(\frac{3}{4}; -\frac{3}{4} \right)$

- N là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_A = 2x_N \\ y_B + y_A = 2y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + \frac{15}{4} = \frac{6}{4} \\ y_B - \frac{7}{4} = -\frac{6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -\frac{9}{4} \\ y_B = \frac{1}{4} \end{cases}$

hay $B = \left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right)$

- M là trung điểm BC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - \frac{9}{4} = -2 \\ y_C + \frac{1}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{1}{4} \\ y_C = \frac{7}{4} \end{cases}$

hay $C = \left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$

Tóm lại toạ độ các đỉnh của ΔABC là :

$$A = \left(\frac{15}{4}; -\frac{7}{4} \right), B = \left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4} \right), C = \left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$$

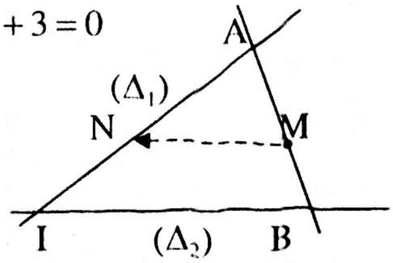
Thí dụ 18

Cho hai đường thẳng $(\Delta) : 2x - y - 2 = 0$, $(\Delta') : x + y + 3 = 0$ và điểm $M = (3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng (d) qua P và cắt (Δ) tại A, cắt (Δ') tại B sao cho PA=PB.

Lời giải

Cách 1:

Gọi I = (Δ)∩(Δ') ⇒ Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$



Hình 94

$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{3}; y = -\frac{8}{3}\right)$

hay I=$\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{8}{3}\right)$. (h94)

Phương trình đường thẳng (Δ_1) qua M, (Δ_1)//(Δ') là

$1.(x - x_P) + 1(y - y_P) = 0$ hay $(x - 3) + (y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

- Gọi N=$(\Delta_1)\cap(\Delta)$ suy ra toạ độ N là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{5}{3}; y = \frac{4}{3}\right)$ hay N=$\left(\frac{5}{3};\ \frac{4}{3}\right)$

Gọi A là điểm đối xứng với I qua N. Ta có $\begin{cases} x_A + x_I = 2x_N \\ y_A + y_I = 2y_N \end{cases}$

hay $\begin{cases} x_A - \frac{1}{3} = 2\cdot\frac{5}{3} \\ y_A - \frac{8}{3} = 2\cdot\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{11}{3} \\ y_A = \frac{16}{3} \end{cases}$ hay A=$(\frac{11}{3};\ \frac{16}{3})$.

- Phương trình đường thẳng (MA) là $\dfrac{x - x_M}{x_A - x_M} = \dfrac{y - y_M}{y_A - y_M}$

hay $\dfrac{x - 3}{\frac{11}{3} - 3} = \dfrac{y - 0}{\frac{16}{3} - 0} \Leftrightarrow \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y}{16} \Leftrightarrow 8x - y - 24 = 0.$

Đó cũng là phương trình đường thẳng (d) mà ta phải tìm.

Cách 2:

Giả sử A có toạ độ là $(x_0; y_0)$. Do A∈(Δ) ⇔ $2x_0 - y_0 - 2 = 0$. (1)

Khoảng cách từ A đến (Δ') là $d_A = \dfrac{|x_0 + y_0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{|x_0 + y_0 + 3|}{\sqrt{2}}$

Khoảng cách từ M đến (Δ') là $d_A = \dfrac{|0 + 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}$

- PM là trung điểm AB ⇒ $\begin{cases} \text{A và B cùng phía so với } (\Delta') \\ d_A = 2d_M \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_0 + y_0 + 3}{\sqrt{2}} = \dfrac{2.6}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + y - 9 = 0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra toạ độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{11}{3}; y = \frac{16}{3}\right)$ hay A=$\left(x = \frac{11}{3}; y = \frac{16}{3}\right)$

- Phương trình đường thẳng (PA) là $\frac{x - x_M}{x_A - x_M} = \frac{y - y_M}{y_A - y_M}$

hay $\frac{x-3}{\frac{11}{3} - 3} = \frac{y - 0}{\frac{16}{3} - 0} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y}{16} \Leftrightarrow 8x - y - 24 = 0.$

Đó cũng là phương trình đường thẳng (d) mà ta phải tìm.

Lời bình

1) Trong lời giải trên sử dụng kiến thức : Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (Δ) : $f(x, y) = Ax + By + C = 0$ và hai điểm $P(x_P; y_P)$, $Q(x_Q; y_Q)$. Hai điểm P và Q ở cùng phía so với đường thẳng (Δ) $\Leftrightarrow$ $f(P).f(Q) > 0$

Từ đó suy ra

* Nếu P và Q ở cùng phía so với (Δ) thì

$$d(P;(\Delta)) = k^2 d(Q; \Delta)) \Leftrightarrow \frac{f(P)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{k^2.f(Q)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow f(P) = k^2.f(Q)$$

* Nếu P và Q ở khác phía so với (Δ) thì

$$d(P;(\Delta)) = k^2 d(Q; \Delta)) \Leftrightarrow \frac{f(P)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{k^2.f(Q)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow f(P) = -k^2.f(Q)$$

Thí dụ 19 (Đề 26)

Viết phương trình các đường trung trực của tam giác ABC, biết trung điểm các cạnh là M=(−1; −1), N=(1; 9), P=(9; 1)

Lời giải

Giả sử M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và (d_M), (d_N), (d_P) lần lượt là đường trung trực các cạnh BC, CA, AB. (h 95)

Ta có $\overrightarrow{PN} = (8; -8)$, $\overrightarrow{PM} = (10; 2)$, $\overrightarrow{MN} = (2; 10)$

Theo tính chất đường trung bình trong tam giác ta có PN//BC

$\Rightarrow (d_M)$ nhận $\frac{1}{8}\overrightarrow{PN} = (1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến

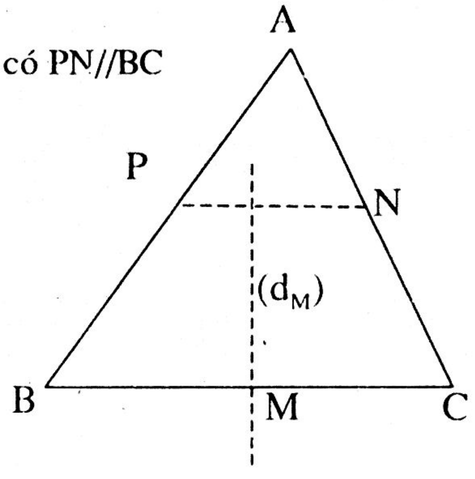
- Bởi vậy (d_M) có phương trình là $(x+1)-(y+1)=0$
$\Leftrightarrow x - y = 0$

- Tương tự (d_N) nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{PM} = (5; 1)$ làm vectơ

pháp tuyến. Bởi vậy (d_N) có phương trình là

$5(x-1)+(y-9)=0 \Leftrightarrow 5x + y - 14 = 0$

- (d_P) nhận $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (1; 5)$ làm vectơ pháp tuyến.



Hình 95

Bởi vậy (d_P) có phương trình là $(x - 9) + 5(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 5y - 14 = 0$

Tóm lại phương trình các đường trung trực tam giác ABC là :

$(d_M) : x - y = 0$, $(d_N) : 5x + y - 14 = 0$, $(d_P) : x + 5y - 14 = 0$.

Thí dụ 20 (Đ 85)

Tam giác ABC có đỉnh $A = (1; 3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$. Viết phương trình các cạnh của nó.

Lời giải

Thấy rằng toạ độ A không nghiệm phương trình các đường trung tuyến đã cho. Vì thế có thể gọi :

* BB' là trung tuyến có phương trình $x - 2y + 1 = 0$,

* CC' là trung tuyến có phương trình $y - 1 = 0$.

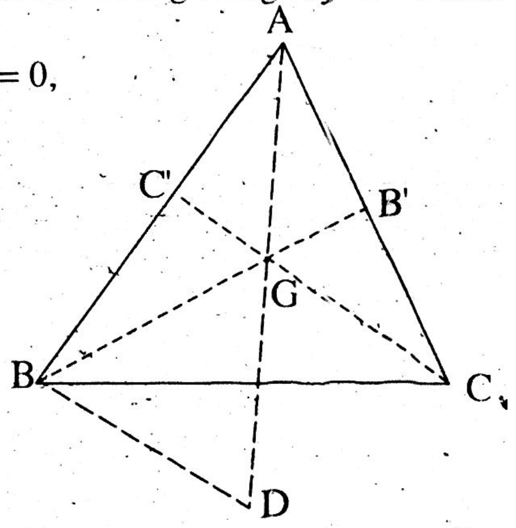
Gọi $G = (BB') \cap (CC') \Rightarrow$ Toạ độ trọng tâm G là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 1$ hay $G = (1; 1)$

Gọi D là điểm đối xứng với A qua G.

Ta có $\begin{cases} x_D + x_A = 2x_G \\ y_D + y_A = 2y_G \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_D + 1 = 2 \\ y_D + 3 = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -1 \end{cases}$ hay $D = (1; -1)$.



Hình 96

Rõ ràng C'D là đường trung bình của $\Delta ABD \Rightarrow BD // C'D$ nên BD có phương trình $y + 1 = 0$.

Lại có $B = (BD)(BB') \Rightarrow$ Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$ hay $B = (-3; -1)$.

Ta cũng thấy BGCD là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_G = x_D - x_B \\ y_C - y_G = y_D - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 1 = 1 + 3 \\ y_C - 1 = -1 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 5 \\ y_C = 1 \end{cases}$ hay $C = (5; 1)$.

- Phương trình cạnh AB là $\dfrac{x - x_B}{x_A - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_A - y_B}$ hay $\dfrac{x + 3}{1 + 3} = \dfrac{y + 1}{3 + 1}$

$\Leftrightarrow x + 3 = y + 1 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$

- Phương trình cạnh AC là $\dfrac{x - x_C}{x_A - x_C} = \dfrac{y - y_C}{y_A - y_C}$ hay $\dfrac{x - 5}{1 - 5} = \dfrac{y - 1}{3 - 1}$

$\Leftrightarrow x - 5 = -2(y - 1) \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

- Phương trình cạnh BC là hay $\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C}$ hay $\frac{x - 5}{-3 - 5} = \frac{y - 1}{-1 - 1}$

$\Leftrightarrow x - 5 = 4(y - 1) \Leftrightarrow x - 4y - 1 = 0$.

Tóm lại, các cạnh của ΔABC có phương trình là :

(AB) : $x - y + 2 = 0$, (BC) : $x - 4y - 1 = 0$, (CA) : $x + 2y - 7 = 0$

Thí dụ 21 (Đề 89)

Tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $5x - 3y + 2 = 0$, đường cao AA', BB' theo thứ tự có phương trình là : $4x - 3y + 1 = 0$; $7x + 2y - 22 = 0$

Lập phương trình hai cạnh AC, BC và đường cao còn lại.

Lời giải

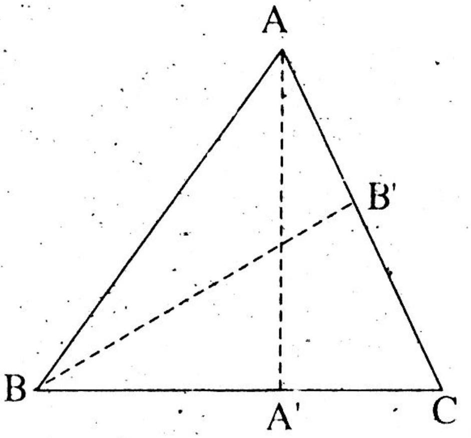
Cách 1 (h 97):

- *Phương trình AC.*

Bởi $A = (AB) \cap (AA') \Rightarrow$ Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = -1$ hay $A = (-1; -1)$

Bởi $AC \perp BB'$ nên AC có phương trình $2(x + 1) - 7(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y - 5 = 0$



Hình 97

- *Phương trình BC.*

Bởi $B = (AB) \cap (BB') \Rightarrow$ Toạ độ B là nghiệm của hệ :

$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ hay $B = (2; 4)$.

Bởi $BC \perp AA'$ nên BC có phương trình $3(x - 2) + 4(y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 22 = 0$

- *Phương trình đường cao CC'.*

Bởi $C = (AC) \cap (BC) \Rightarrow$ Toạ độ C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - 27y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } C = (6; 1)$$

Bởi $CC' \perp AB$ nên CC' có phương trình $3(x - 6) + 5(y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 5y - 23 = 0$

Kết luận : Cạnh AC : $2x - 7y - 5 = 0$, cạnh BC : $3x + 4y - 22 = 0$, đường cao CC' : $3x + 5y - 23 = 0$

Cách 2: (*Sử dụng kĩ thuật viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp chùm*).

- *Phương trình AC.*

(AC) là đường thẳng thuộc chùm với hai đường thẳng cơ sở là (AB) và (AA') đồng thời (AC) ≠ (AB) nên phương trình (AC) có dạng $\lambda(5x - 3y + 2) + 4x - 3y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (5\lambda + 4)x - 3(\lambda + 1)y + 2\lambda + 1 = 0$ (1)

Vectơ pháp tuyến của (AC) là $\overrightarrow{n_1} = (5\lambda + 4; -3(\lambda + 1))$

Vectơ pháp tuyến của (BB') là $\overrightarrow{n_2} = (7; 2)$

$AC \perp BB' \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 7(5\lambda + 4) - 2.3(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow 29\lambda + 22 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{22}{29}$. Thay vào (1) ta có $(4 - 5.\frac{22}{29})x - 3(1 - \frac{22}{29})y - 2.\frac{22}{29} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 21y - 15 = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y - 5 = 0$

- *Phương trình BC.*

Xét chùm đường thẳng tạo bởi hai đường thẳng cơ sở là (BC) và (BB') đồng thời (BC) ≠ (BA) ⇒ Phương trình (BC) có dạng

$$\lambda(5x - 3y + 2) + 7x + 2y - 22 = 0$$

Tương tự như đối với (AC) suy ra : $3x + 4y - 22 = 0$ là phương trình của (BC).

- *Phương trình đường cao CC'.*

Xét chùm đường thẳng tạo bởi hai đường thẳng cơ sở là (AA') và (BB'")

Tương tự có $3x + 5y - 23 = 0$ là phương trình của (CC').

Lời bình.

- Trong chùm đường thẳng (d) có phương trình

$\lambda(Ax + By + C) + \mu(A'x + B'y + C') = 0, (\lambda^2 + \mu^2 > 0)$ (1)

(với hai đường thẳng cơ sở $(\Delta) : Ax+By+C=0$, $(\Delta') : A'x + B'y + C' = 0$, $A : A' \neq B : B'$)

Khi $\lambda = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow A'x + B'y + C' = 0$ hay $(d) \equiv (\Delta')$

Khi $\mu = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ hay $(d) \equiv (\Delta)$

Hay nói cách khác

Khi $\lambda \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow A'x+B'y+C' \neq 0 \Leftrightarrow (d) \neq (\Delta')$

Khi $\mu \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow Ax+By+C \neq 0 \Leftrightarrow (d) \neq (\Delta)$

Suy ra :

* Chùm đường thẳng $\lambda(Ax+By+C)+A'x + B'y + C' = 0$, khuyết đường thẳng (Δ):

$$Ax + By + C = 0$$

* Chùm đường thẳng $\mu(A'x + B'y + C') + Ax + By + C = 0$, khuyết đường thẳng (Δ'): $A'x + B'y + C' = 0$

* Chùm đường thẳng $y = \lambda(x) + y_0$ (đường thẳng có hệ số góc bằng λ) luôn khuyết đường thẳng $x = x_0$

- Để lời giải đỡ phức tạp, trong lời giải bài toán trên khi tìm phương trình (AC) ta sử dụng chùm khuyết đường thẳng (AB) : $\lambda(5x - 3y + 2) + 4x - 3y + 1 = 0$

Tương tự cho (BC), (CC').

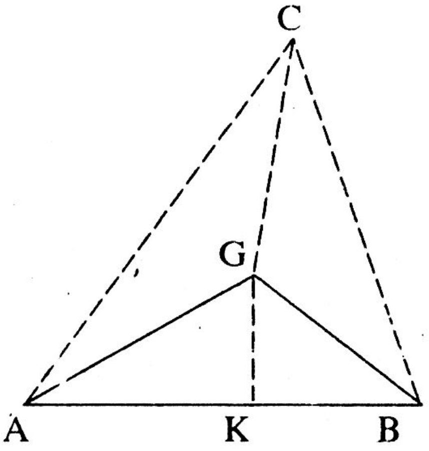
Thí dụ 22 (Đề 86)

Cho tam giác ABC có diện tích $S = \frac{3}{2}$, hai đỉnh là A(2; –3), B(3; –2) và trọng tâm G thuộc đường thẳng (Δ): $3x - y - 8 = 0$.

Tìm toạ độ đỉnh C.

Lời giải

(Nếu biết toạ độ G thì cũng biết được toạ độ C. Bởi vậy bài toán đưa về xác định điểm G)



Hình 98

Giả sử G =$(x_0; y_0)$. G$\in(\Delta)$ $\Rightarrow$ $3x_0-y_0-8=0$. (1)

Phương trình đường thẳng BC là

$$\frac{x-x_B}{x_A-x_B}=\frac{y-y_B}{y_A-y_B} \text{ hay } \frac{x-3}{2-3}=\frac{y+2}{-3+2}$$

$$\Leftrightarrow x-3=y+2 \Leftrightarrow x-y-5=0$$

Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ G đến AB. Khoảng cách từ G đến đường thẳng BC là $GK=\frac{|x_0-y_0-5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x_0-y_0-5|}{\sqrt{2}}$

Ta có $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

$$=\sqrt{(2-3)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{2}$$

Diện tích ΔGAB là $S_1=\frac{1}{2}GK.AB=\frac{1}{2}\frac{|x_0-y_0-5|}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{2}|x_0-y_0-5|$

Ta có $S_1=\frac{S}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|x_0-y_0-5|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x_0-y_0-5|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-y_0-6=0 \\ x_0-y_0-4=0 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1), (2) ta có $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x_0-y_0-8=0 \\ x_0-y_0-6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x_0-y_0-8=0 \\ x_0-y_0-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-2 \end{cases} \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} G=(1;-5) \\ G'=(2;-2) \end{array}\right.$

Ta biết rằng : G là trọng tâm ΔABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases}$

Với G = (1; −5) ta có :

$$\begin{cases} 2+3+x_C=3.1 \\ -3-2+y_C=3.(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=-2 \\ y_C=-10 \end{cases} \text{ hay } C=(-2;-10)$$

Với G = (2; −2) ta có : $\begin{cases} 2+3+x_C=3.2 \\ -3-2+y_C=3.(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C=1 \\ y_C=-1 \end{cases}$ hay C'=(1; −1)

Tóm lại : Có hai điểm C thoả mãn yêu cầu bài toán là: C=(−2; −10), C'=(1; −1).

Thí dụ 23 (Đề 74)
Cho hai điểm P(2; 5) và Q(5; 1). Lập phương trình đường thẳng qua P sao cho khoảng cách từ Q đến đường thẳng đó bằng 3.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (Δ) qua P có dạng $\lambda(x-2)+\mu(y-5)=0$ (1)
$(\lambda^2+\mu^2>0)$.

Khoảng cách từ Q đến (Δ) bằng 3 khi và chỉ khi $\frac{|\lambda(5-2)+\mu(1-5)|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}=3$

$$\Leftrightarrow \frac{|3\lambda-4\mu|}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}=3 \Leftrightarrow (3\lambda-4\mu)^2=9(\lambda^2+\mu^2) \Leftrightarrow \mu(7\mu-24\lambda)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\mu=0;\lambda\in R^*)\\ 7\mu=24\lambda\end{array}\right.. \text{ Chọn } \left[\begin{array}{l}(\mu=0;\lambda\in R^*)\\ (\mu=24;\lambda=7)\end{array}\right., \text{ thay vào (1) :}$$

Với (λ=0; μ≠0) ta có (1) $\Leftrightarrow \lambda(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$

Với (λ=24; μ=7) ta có (1) $\Leftrightarrow 24(x-2)+7(y-5)=0 \Leftrightarrow 24x+7y-83=0$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là (Δ) : $x-2=0$, (Δ') : $24x+7y-83=0$.

Thí dụ 24

Cho tam giác ABC có đỉnh C(4; −1), (Δ): $2x-3y+12=0$, (Δ') : $2x+3y=0$ theo thứ tự là phương trình đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ một đỉnh. Lập phương trình các cạnh của tam giác ấy.

Lời giải

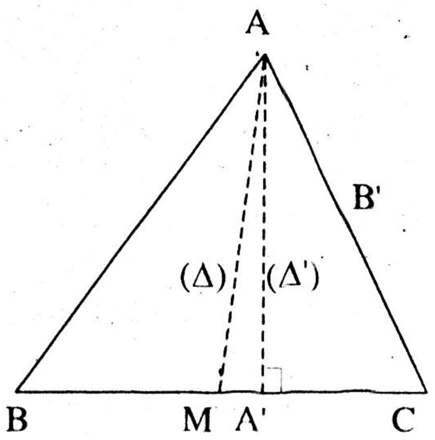
Cách 1 (h 99) :

Thấy rằng toạ độ điểm C không là nghiệm của phương trình các đường thẳng (Δ), (Δ').

Ta gọi A=(Δ)∩(Δ') và B là đỉnh còn lại. (*)

Do vậy toạ độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2x-3y+12=0\\ 2x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases} \text{ hay } A=(-3;2).$$



Hình 99

- *Phương trình cạnh (AC)*

Phương trình cạnh (AC) là $\frac{x-x_C}{x_A-x_C}=\frac{y-y_C}{y_A-y_C}$

hay $\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y+1}{2+1} \Leftrightarrow 3(x-4)=-7(y+1)$

$\Leftrightarrow 3x+7y-5=0.$

- *Phương trình cạnh (BC)*

Theo cách gọi ta có BC⊥(Δ') và C =(4;−1) nên phương trình cạnh (BC) là:

$$3(x-4)+2(y+1)=0 \Leftrightarrow 3x+2y-10=0.$$

- *Phương trình cạnh (AB)*

Gọi M là trung điểm BC suy ra toạ độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+2y-10=0\\ 2x+3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\ y=-4\end{cases} \text{ hay } M=(6;-4)$$

$$\text{* M là trung điểm BC} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B+x_C=2x_M\\ y_B+y_C=2y_M\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B+4=2.6\\ y_B-1=2.(-4)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = -7 \end{cases}$. Vậy B = (8;–7).

Phương trình cạnh (AB) là $\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$ hay $\frac{x-8}{-3-8} = \frac{y+7}{2+7}$

$\Leftrightarrow 9(x-8) = -11(y+7) \Leftrightarrow 9x + 11y + 5 = 0$.

- *Tóm lại* : Ba cạnh của ΔABC lần lượt có phương trình là (AB): 9x + 11y+5=0, (BC) : 3x+2y–10=0, (CA) : 3x+7y–5=0.

Cách 2 (Tiếp nối từ (*)–h 100)

(Hai cạnh (AC) và (AB) đều thuộc chùm đường thẳng (𝒟) xác định bởi hai đường thẳng (Δ) và (Δ') nên ta có lời giải như sau)

- *Phương trình cạnh (BC)*

Theo cách gọi ta có BC⊥(Δ') và C = (4; –1) nên phương trình cạnh (BC) là:

$$3(x-4) + 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 10 = 0.$$

- *Phương trình cạnh (AC)*

Đường thẳng (𝒟) thuộc chùm đường thẳng tâm A có phương trình là

$\lambda(2x - 3y + 12) + \mu(2x + 3y) = 0$

$\Leftrightarrow 2(\lambda + \mu)x - 3(\lambda - \mu)y + 12\lambda = 0, (\lambda^2 + \mu^2 > 0)$ (1)

*(𝒟) chứa C ⇔ Toạ độ của C là nghiệm của (1)

$\Leftrightarrow 2(\lambda + \mu)4 - 3(\lambda - \mu)(-1) + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow 23\lambda + 5\mu = 0$.

Chọn λ = 5, μ = –23 thay vào (1) có –36x – 84y + 60 = 0 ⇔ 3x + 7y – 5 = 0. Đó là phương trình cạnh (AC).

- *Phương trình cạnh (AB)*

Gọi M là trung điểm BC suy ra toạ độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$

hay M=(6; –4).

* M là trung điểm BC ⇔ $\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases}$

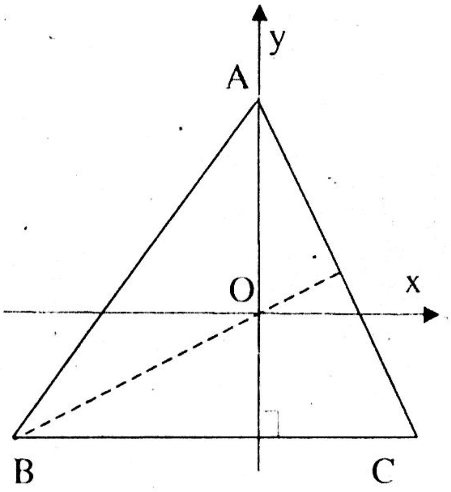
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B + 4 = 2.6 \\ y_B - 1 = 2.(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = -7 \end{cases}$. Vậy B=(8;–7).

* (𝒟) chứa B ⇔ toạ độ của B là nghiệm của (1)

$\Leftrightarrow 2(\lambda + \mu)8 - 3(\lambda - \mu)(-7) + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow 49\lambda - 5\mu = 0$.

Chọn λ = 5, μ = 49 thay vào (1) có 108x + 132y + 60 = 0

⇔ 9x + 11y + 5 = 0. Đó là phương trình cạnh (AB)



Hình 100

Gọi phương trình cạnh AB, AC theo thứ tự là 5x–2y+6=0; 4x+7y–21=0.

Bài toán yêu cầu viết phương trình cạnh BC

- Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}5x-2y+6=0\\4x+7y-21=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ hay A=(0; 3)

- Rõ ràng đường cao BO đi qua O và BO⊥AC suy ra (BO) có phương trình là 7x –4 y=0.

B = (AB)∩(BO) ⇒ Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}5x-2y+6=0\\7x-4y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-4\\y=-7\end{cases}$ hay B=(–4; – 7)

- Do A = (0; 3) nên A∈Oy, kết hợp với (1) suy ra BC//Ox ⇒ BC có phương trình $y = y_B = -7$.

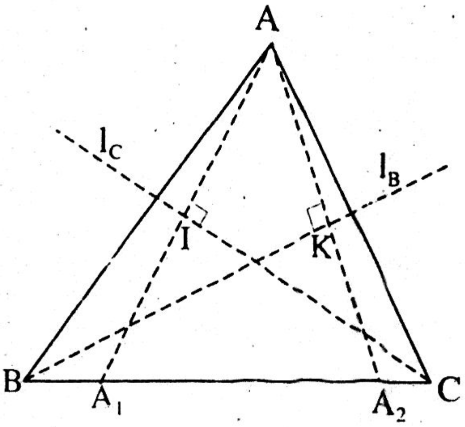
Thí dụ 25

Cho tam giác ABC có A=(2; –1)và hai đường phân giác trong có phương trình x–2y+1=0, x+y+3=0. Lập phương trình cạnh BC.

Lời giải

Kí hiệu l_B, l_C theo thứ tự là các đường phân giác trong của góc B, C. (h101)

Thấy rằng toạ độ điểm A không là nghiệm của các phương trình x – 2y + 1 = 0, x + y + 3 = 0. Vì vậy có thể gọi x – 2y + 1 = 0, x + y + 3 = 0 theo thứ tự là phương trình của l_B, l_C .



Hình 101

Nhận xét :

Do đường thẳng (AC) đối xứng với đường thẳng (BC) qua đường thẳng l_C nên nếu A_1 là điểm đối xứng của A qua l_C thì A_1∈(BC).

Tương tự nếu A_1 là điểm đối xứng của A qua l_B thì A_2∈(BC). Suy ra đường thẳng (BC) chính là đường thẳng A_1A_2.

Bài toán dẫn tới xác định A_1 và A_2.

- Xác định A_1.

Phương trình đường thẳng (Δ_1) qua A vuông góc với l_C là (x–2)–(y+1)=0 ⇔ x–y–3=0

Gọi I=(Δ_1)∩(l_C) ⇒ Toạ độ I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x+y+3=0\\x-y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$ hay I=(0;–3)

A_1 đối xứng với A_2 qua l_C ⇔ $\begin{cases}x_{A_1}+x_A=2x_I\\y_{A_1}+y_A=2y_I\end{cases}$ hay $\begin{cases}x_{A_1}+2=0\\y_{A_1}-1=2(-3)\end{cases}$

⇔ $\begin{cases}x_{A_1}=-2\\y_{A_1}=-5\end{cases}$ hay A_1=(–2; –5).

- Xác định A_2.

Phương trình đường thẳng (Δ_2) qua A vuông góc với l_B là $2(x-2)+(y+1)=0$ $\Leftrightarrow$ $2x+y-3=0$

Gọi $J=(\Delta_2)\cap(l_B)$ $\Rightarrow$ Toạ độ J là nghiệm của $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x=y=1

hay J=(1; 1)

A_2 đối xứng với A qua $l_C \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A2}+x_A=2x_J \\ y_{A2}+y_A=2y_J \end{cases}$ hay $\begin{cases} x_{A1}+2=2.1 \\ y_{A1}-1=2.1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{A1}=0 \\ y_{A1}=3 \end{cases}$ hay $A_2=(0; 3)$

- Phương trình cạnh A_1A_2 là $\dfrac{x-x_{A1}}{x_{A2}-x_{A1}}=\dfrac{y-y_{A1}}{y_{A2}-y_{A1}}$ hay $\dfrac{x+2}{0+2}=\dfrac{y+5}{3+5}$

$\Leftrightarrow$ 4(x + 2) = 2y + 5) $\Leftrightarrow$ 4x − y + 3 = 0. Đó cũng là phương trình cạnh (BC) mà ta phải tìm.

Thí dụ 26 (Đề 20)

Cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) có phương trình

$$(\Delta_1):\begin{cases} x=x_1+mt \\ y=y_1+nt \end{cases},\ (\Delta_1):\begin{cases} x=x_1+pt' \\ y=y_1+qt' \end{cases}$$

(x_1, x_2, y_1, y_2 là bốn số cố định, $t, t'\in R$, $m^2+n^2\neq 0$, $p^2+q^2\neq 0$)

Tìm điều kiện cần và đủ theo (m, n, p, q) để các đường thẳng ấy :

1) cắt nhau,
2) song song với nhau,
3) trùng nhau,
4) vuông góc với nhau.

Lời giải

Toạ độ giao điểm của hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x_1+mt=x_2+pt' \\ y_1+nt=y_2+qt' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt-pt'=x_2-x_1 \\ nt-qt'=y_2-y_1 \end{cases}$$

Ta có $D=\begin{vmatrix} m & -n \\ p & -q \end{vmatrix}=np-mq$,

$$D_x=\begin{vmatrix} (x_2-x_1) & -n \\ (y_2-y_1) & -q \end{vmatrix}=n(x_2-x_1)-m(y_2-y_1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & (x_2-x_1) \\ p & (y_2-y_1) \end{vmatrix}=p(x_2-x_1)-q(y_2-y_1)$$

1) Ta có (Δ_1) và (Δ_2) cắt nhau $\Leftrightarrow D\neq 0 \Leftrightarrow np-mq\neq 0$.

2) Ta có $(\Delta_1)//(\Delta_2) \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np - mq = 0 \\ \left[\begin{array}{l} n(x_2 - x_1) \neq m(y_2 - y_1) \\ p(x_2 - x_1) \neq q(y_2 - y_1) \end{array}\right. \end{cases}$

3) Ta có $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2) \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} np - mq = 0 \\ \left[\begin{array}{l} n(x_2 - x_1) = m(y_2 - y_1) \\ p(x_2 - x_1) = q(y_2 - y_1) \end{array}\right. \end{cases}$

4) Gọi $\vec{u} = (m; n)$, $\vec{v} = (p; q)$, theo thứ tự đó là lượt là vectơ chỉ phương của (Δ), (Δ'). Ta có $(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow mp + nq = 0$

Thí dụ 27 (ĐH Y Hà Nội, 1996)

Cho hai đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình

$(\Delta) : (a - b)x + y = 1$, $(\Delta') : (a^2 - b^2)x + ay = b$

(a, b là các số cho trước không đồng thời bằng không)

1) Tìm giao điểm I (*nếu có*) của (Δ) và (Δ')

2) Tìm điều kiện đối với a, b để I thuộc Ox.

Lời giải

1) Toạ độ $I = (\Delta) \cap (\Delta')$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} (a - b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases}$

Ta có $D = \begin{vmatrix} (a - b) & 1 \\ (a^2 - b^2) & a \end{vmatrix} = b(b - a)$, $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b$, $D_y = \begin{vmatrix} (a - b) & 1 \\ (a^2 - b^2) & b \end{vmatrix} = a(b - a)$

Điểm I tồn tại $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow b(b - a) \neq 0$. Khi đó $\begin{cases} x_I = \dfrac{D_x}{D} = -\dfrac{1}{b} \\ y_I = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

Vậy $I = \left(-\dfrac{1}{b}; \dfrac{a}{b}\right)$

2) Điểm $I \in Ox \Leftrightarrow y_I = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Bài toán 7. (*Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song*)

Cho hai đường thẳng song song có phương trình

$(\Delta) : Ax + By + C = 0$; $(\Delta) : Ax + By + C' = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$, $C \neq C'$

Tính khoảng cách giữa (Δ) và (Δ').

Lời giải

Với mọi $M(x_0; y_0) \in (\Delta)$ ta có : $Ax_0 + By_0 + C = 0$ (1)

Khoảng cách giữa (Δ) và (Δ') là $d(M, \Delta') = \dfrac{|A'x_0 + B'y_0 + C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$=\frac{|(A'x_0+B'y_0+C')-(Ax_0+By_0+C)|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ (\text{do }(1))=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Chẳng hạn :

Khoảng cách giữa (Δ) : $\sqrt{3}x+y+51=0$ và (Δ') : $\sqrt{3}x+y+13=0$ là:

$$d=\frac{|51-13|}{\sqrt{3+1^2}}=\frac{38}{2}=19$$

Thí dụ 28

Trong mặt phẳng toạ độ Đề các vuông góc Oxy cho bốn điểm A(2; 1), B(0; 1), C(3; 5), D(−3; −1). Viết phương trình các cạnh hình vuông biết rằng hình vuông ấy có một cặp cạnh song song lần lượt đi qua A, C; cặp cạnh còn lại đi qua B, D.

Lời giải

- Phương trình hai đường thẳng song song lần lượt đi qua A, C là

(Δ_A) : $a(x-2)+b(y-1)=0 \Leftrightarrow ax+by-(2a+b)=0$,

(Δ_C) : $a(x-3)+b(y-5)=0 \Leftrightarrow ax+by-(3a+5b)=0$, $(a^2+b^2>0)$

Khoảng cách giữa (Δ_A) và (Δ_C) là $d_1=\dfrac{|-2a-b+(3a+5b)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- Phương trình hai đường thẳng vuông góc với (Δ_A) lần lượt đi qua B, C là

(Δ_B) : $bx-a(y-1)=0 \Leftrightarrow bx-ay+a=0$

(Δ_D) : $b(x+3)-a(y+1)=0 \Leftrightarrow bx-ay+3b-a=0$,

Khoảng cách giữa (Δ_A) và (Δ_C) là $d_2=\dfrac{|a-(3b-a)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- Bốn đường thẳng (Δ_A), (Δ_C), (Δ_B), (Δ_D) chứa cạnh hình vuông khi và chỉ khi

$$d_1=d_2 \Leftrightarrow \frac{|a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |a+4b|=|2a-3b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+4b=2a-3b \\ a+4b=-2a+3b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=7b \\ b=-3a \end{array}\right.$$

* Với a = 7b, chọn b = 1 ⇒ a = 7, ta có phương trình các cạnh hình vuông cần tìm là (Δ_A) : $7x+y-15=0$, (Δ_C) : $7x+y-26=0$, (Δ_B) : $x-7y+7=0$, (Δ_D) : $x-7y-4=0$

* Với b=−3a, chọn a=1 ⇒ b=−3, có phương trình các cạnh hình vuông cần tìm là (Δ_A) : $x-3y+1=0$, (Δ_C) : $x-3y+12=0$, (Δ_B) : $3x+y+1=0$, (Δ_D) : $3x+y-10=0$

Thí dụ 29

Cho hai họ đường thẳng $(\mathcal{D}_m)$ và $(\mathcal{D}_n)$ có phương trình :

$(\mathcal{D}_m)$: $mx+2my-4=0$, (1)

$(\mathcal{D}_n)$: $(n^2-3n+7)x+n(n+3)y+19=0$. (2)

1) Chứng tỏ rằng chỉ có một trong hai họ đã cho là chùm đường thẳng.

2) Chùm đường thẳng tìm được có chứa hai đường thẳng của họ còn lại.

Lời giải

1) Viết lại (1) ⇔ $mx+2my-4=0 \Leftrightarrow (x+2)m=y+4$. (3)

- Họ $(\mathcal{D}_m)$ là chùm đường thẳng ⇔ $(\mathcal{D}_m)$ luôn đi qua một điểm cố định

⇔ Phương trình (3) nghiệm đúng với mọi m . Điều đó có khi và chỉ khi $\begin{cases}x+2=0\\y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-4\end{cases}$. Vậy khi m thay đổi, ($\mathcal{D}_m$) luôn đi qua điểm cố định I=(−2; −4) ⇔ Họ đường thẳng ($\mathcal{D}_m$) lập thành chùm có tâm là I=(−2; −4)

Viết lại (2) ⇔ $(n^2-3n+7)x+n(n+3)y+19=0 \Leftrightarrow (x+y)n^2-3(x-y)n+7x+19=0$ (4)

• Họ ($\mathcal{D}_n$) là chùm đường thẳng ⇔ Phương trình (4) nghiệm với mọi m :

Điều đó có khi và chỉ khi $\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\\7x+19=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\19=0\end{cases}$. Mâu thuẫn.

Vậy họ đường thẳng ($\mathcal{D}_n$) không phải là chùm đường thẳng.

2) Đường thẳng ($\mathcal{D}_n$) thuộc chùm đường thẳng ($\mathcal{D}_m$) ⇔ $I\in(\mathcal{D}_n)$

$\Leftrightarrow (-2-4)n^2-3(-2+4)n+7(-2)+19=0$

$\Leftrightarrow 2n^2+3n-5=0 \Leftrightarrow \left\{n=1;\ n=-\dfrac{5}{2}\right\}$

Vậy trong họ đường thẳng ($\mathcal{D}_n$) có hai đường thẳng ứng với n=1 và $n=-\dfrac{5}{2}$ thuộc chùm đường thẳng ($\mathcal{D}_m$) (đpcm).

Thí dụ 30 (Đề 136)

Trong mặt phẳng cho hai họ đường thẳng (Δ), (Δ') có phương trình :

$$(\Delta): kx-y+k=0 \qquad (1)$$

$$(\Delta'): (1-k^2)x+2ky-(1+k^2)=0 \qquad (2)$$

1) Chứng minh (Δ) là chùm đường thẳng.

2) Với mỗi giá trị của k, hãy xác định giao điểm M của (Δ) và (Δ').

3) Tìm quỹ tích điểm M.

Lời giải

1) Viết lại (1) ⇔ $(x+1)k-y=0$ (3)

• Họ đường thẳng (Δ) lập thành chùm đường thẳng ⇔ (Δ) luôn đi qua một điểm cố định ⇔ Phương trình (3) nghiệm đúng với mọi m . Điều đó có khi và chỉ khi $\begin{cases}x+1=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$

Vậy khi m thay đổi, (Δ) luôn đi qua điểm cố định I=(−1; 0) ⇔ Họ đường thẳng (Δ) lập thành chùm có tâm là I=(−1; 0).

2) Toạ độ giao điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases}kx-y+k=0\\(1-k)x+2ky-(1+k^2)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\\y=\dfrac{2k}{1+k^2}\end{cases}.\ \text{Vậy } M=\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2};\ \dfrac{2k}{1+k^2}\right)$$

3) Ta có $x_M^2+y_M^2=\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2+\left(\dfrac{2k}{1+k^2}\right)^2=1 \Rightarrow$ Tập hợp giao điểm M của (Δ) và (Δ') là đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2+y^2=1$.

(Đó là đường tròn tâm O(0; 0) và bán kính R = 1)

Thí dụ 31 (Đ19)

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng ($\mathcal{D}$) có phương trình

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0$$

1) Chứng minh khi α thay đổi, đường thẳng ($\mathcal{D}$) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

2) Cho điểm I(−2; 1). Dựng IH⊥(Δ), H∈($\mathcal{D}$) và kéo dài tia IH một đoạn HN = 2IH. Tính toạ độ N theo α.

Lời giải

1) *Chứng ($\mathcal{D}$) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

(($\mathcal{D}$) luôn tiếp xúc với một đường tròn($\mathscr{C}$) cố định ⇔ Tồn tại một điểm (x_0; y_0) mà khoảng cách từ nó đến đường thẳng ($\mathcal{D}$) là một hằng số. Từ đó có cách giải sau)

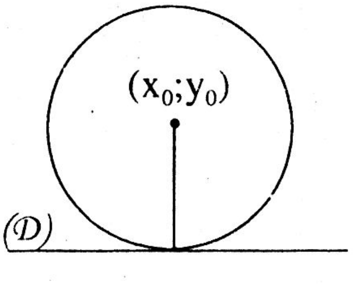
Gọi (x_0; y_0) là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Khoảng cách từ (x_0; y_0) đến đường thẳng ($\mathcal{D}$) là

$$d=\frac{|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha+2\cos\alpha+1|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=|(x_0+2)\cos\alpha+y_0\sin\alpha+1|.\ \text{(h102)}$$

- d không phụ thuộc α $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0+2=0\\ y_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\\ y=0\end{cases}$.

Khi đó d=1.

Vậy khoảng cách từ I(−2; 0) đến ($\mathcal{D}$) luôn bằng 1 với mọi giá trị của α ⇔ ($\mathcal{D}$) luôn tiếp xúc với một đường tròn ($\mathscr{C}$) có tâm là I(−2; 0), bán kính R=1.



Hình 102

2) *Tính toạ độ N theo α.*

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{u}$=(sinα; −cosα)

Gọi (Δ) là đường thẳng qua I và vuông góc với (Δ). Phương trình của (Δ) là:

$$(x+2)\sin\alpha-(y-1)\cos\alpha=0 \Leftrightarrow x\sin\alpha-y\cos\alpha+2\sin\alpha+\cos\alpha=0$$

- Từ giả thiết bài toán suy ra H=($\mathcal{D}$) ∩(Δ) ⇔ Toạ độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha+2\cos\alpha+1=0\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha+2\sin\alpha+\cos\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=-(2\cos\alpha+1)\\ x\sin\alpha-y\cos\alpha=-(2\sin\alpha+\cos\alpha)\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{vmatrix}=-1,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-(2\cos\alpha+1) & \sin\alpha\\ -(2\sin\alpha+\cos\alpha) & (-\cos\alpha)\end{vmatrix}=\cos\alpha(1+\sin\alpha)+2$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -(2\cos\alpha+1)\\ \sin\alpha & -(2\sin\alpha+\cos\alpha)\end{vmatrix}=\sin\alpha-\cos^2\alpha=\sin\alpha(1+\sin\alpha)-1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-2-\sin\alpha(1+\cos\alpha)\\ y=1-\sin\alpha(1+\sin\alpha)\end{cases}.\ \text{Vậy H}:\begin{cases}x_H=-2-\sin\alpha(1+\cos\alpha)\\ y_H=1-\sin\alpha(1+\sin\alpha)\end{cases}$$

Gọi N=(x_N; y_N) là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng, ta có

$$\overrightarrow{IN}=(x_N+2;y_N-1),\ \overrightarrow{IH}=(x_N+2;y_H-1)$$

- $HN = 2IH \Leftrightarrow \overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IH}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N+2=3(x_H+2)\\ y_N-1=3(y_H-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=3x_H+4\\ y_N=3y_H-2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=-2-3\cos\alpha(1+\sin\alpha)\\ y_N=1-3\sin\alpha(1+\sin\alpha)\end{cases}$$

Bài toán 8. Xác định điểm thuộc miền góc nhọn, góc tù

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(x_0; y_0) và hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) cắt nhau, không vuông góc với nhau theo thứ tự lần lượt có phương trình :

$$f_1(x, y) = A_1x+B_1y+C_1=0$$
$$f_2(x, y) = A_2x+B_2y+C_2=0$$

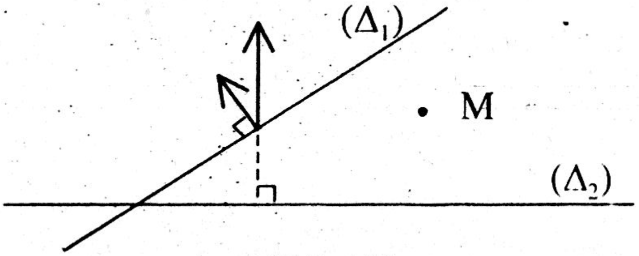
Gọi $\overrightarrow{n_1}$ =(A_1; B_1), $\overrightarrow{n_2}$ =(A_2; B_2) là các vectơ pháp tuyến tương ứng của (Δ_1), (Δ_2).

Chứng minh rằng :

Điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) là $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(M).f_2(M) < 0$.

Lời giải

- Nếu : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}>0 \Leftrightarrow$ góc giữa $(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$ là góc nhọn $\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})>0$



Hình 103

* Khi đó M là điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) $\Leftrightarrow f_1(M).f_2(M)<0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(M).f_2(M)<0$ (đpcm)

- Nếu $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}<0 \Leftrightarrow$ góc giữa $(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})$ là góc tù $\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})<0$

Xét (Δ_1) với phương trình $f'(x, y)= -f_1(x; y)$ hay

$$f'(x, y) = -A_1x - B_1y - C_1 \text{ có } \overrightarrow{n'} = (A_1; -B_1) \Rightarrow \overrightarrow{n'} = -\overrightarrow{n_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{n'}.\overrightarrow{n_2} > 0.$$

Tương tự trường hợp 1) có M là điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) $\Leftrightarrow f'(M).f_2(M) < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n'}.\overrightarrow{n_2}.f'(M).f_2(M) < 0$

$\Leftrightarrow (-\overrightarrow{n_1}).\overrightarrow{n_2}(-f_1(M)).f_2(M) <0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(M).f_2(M) <0$ (đpcm)

- Tóm lại trong mọi trường hợp luôn có $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(M).f_2(M) < 0$ là điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2).
- Hiển nhiên có

Điều kiện cần và đủ để điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$ là $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(M).f_2(M) > 0$,

Thí dụ 32

Các điểm $M(0; 1)$, $N(-7; 2)$ thuộc miền góc tù hay miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng sau đây :

(Δ_1) có phương trình $f_1(x, y) = 2x + y - 3 = 0$,

(Δ_2) có phương trình $f_2(x, y) = x + 3y - 1 = 0$.

Lời giải

Các vectơ pháp tuyến tương ứng của (Δ_1), (Δ_2) là $\overrightarrow{n_1} = (2; 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1; 3)$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 2.1 + 1.3 = 5 > 0,\ f_1(0) = 2.0 + 1.0 - 3 = -3$$

- Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 5 > 0 \\ f_1(M) = -2 < 0 \\ f_2(m) = 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(m).f_2(m\ ) < 0 \Leftrightarrow$ Điểm M thuộc miền góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2).
- Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 5 > 0 \\ f_1(N) = -13 < 0 \\ f_2(N) = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(N).f_2(N) > 0 \Leftrightarrow$ Điểm N thuộc miền góc tù tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2).

Bài toán 9. Viết phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù tạo bởi hai đường thẳng.

Kỹ thuật 10. *Viết phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù tạo bởi hai đường thẳng.*

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x_0; y_0)$ và hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) cắt nhau, không vuông góc với nhau theo thứ tự lần lượt có phương trình :

$$f_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$f_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Viết đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng ấy.

Lời giải

Các đường phân giác của góc tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là

$$\frac{|f_1(x,y)|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{|f_2(x,y)|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (1)$$

Điểm $M(x; y)$ thuộc đường phân giác góc nhọn tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ')

$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(x, y).f_2(x, y) < 0 \Leftrightarrow (A_1A_2 + B_1B_2).f_1(x, y).f_2(x, y) < 0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : Đường phân giác trong góc nhọn tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là $\frac{(A_1A_2 + B_1B_2)}{|A_1A_2 + B_1B_2|}\cdot\frac{f_1(x,y)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{f_2(x,y)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$

Chú ý. Ta đồng thời có phương trình đường phân giác góc tù tạo bởi hai đường thẳng nói trên là $\frac{(A_1A_2 + B_1B_2)}{|A_1A_2 + B_1B_2|}\cdot\frac{f_1(x,y)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{f_2(x,y)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Thí dụ 33

Viết phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự có phương trình :

$$f_1(x, y) = 3x - y + 2 = 0,\ f_2(x, y) = x + 2y - 3 = 0.$$

Lời giải

- Các vectơ pháp tuyến tương ứng của (Δ_1), (Δ_2) là $\overrightarrow{n_1} = (3; -1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1; 2)$, $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}. = 3.1 + (-1).2 = 1$

- Các đường phân giác của góc tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là $\frac{|f_1(x,y)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \pm\frac{|f_2(x,y)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Leftrightarrow |f_1(x, y)| = \pm\sqrt{2}\,|f_2(x, y)|$ (1)

- Điểm M(x; y) thuộc đường phân giác góc nhọn tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ')

$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}.f_1(x, y).f_2(x, y) < 0 \Leftrightarrow f_1(x, y).f_2(x, y) < 0$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : Đường phân giác trong góc nhọn tạo bởi các đường thẳng (Δ) và (Δ') có phương trình là $f_1(x, y) = \sqrt{2}\, f_2(x, y)$

$\Leftrightarrow 3x - y + 2 = \sqrt{2}\,(x + 2y - 3) \Leftrightarrow (3 - \sqrt{2})x - (1 + 2\sqrt{2})y + 2 + 3\sqrt{2} = 0$

V. VÀI BÀI TOÁN KHÁC

Thí dụ 34

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy cho hai điểm A(−1; 3) và B(1; 1) và đường thẳng (Δ) có phương trình y = 2x.

Xác định điểm C∈(Δ) sao cho ΔABC là :

1) tam giác đều.

2) tam giác cân.

Lời giải

Gọi C(c; 2c) là một điểm bất kì thuộc C. Ta có

$$AC^2 = (c + 1)^2 + (2c - 3)^2 = 5c^2 - 10c + 10,$$

$$BC^2 = (c - 1)^2 + (2c - 1)^2 = 5c^2 - 6c + 2 \text{ và } AB^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

1) Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} BC^2 = AC^2 \\ BC^2 = AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c^2 - 6c + 2 = 5c^2 - 10c + 10 \\ 5c^2 - 6c + 2 = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 5c^2 - 6c - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 2 = 0 \end{cases}$$. Mâu thuẫn, suy ra không tồn tại C∈(Δ) để ΔABC là tam giác đều.

2) ΔABC cân $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BC = AC \\ BC = AB \\ AC = AB \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ 5c^2 - 10c + 10 = 8 \\ 5c^2 - 6c - 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 2 \\ c = \dfrac{5 \pm \sqrt{15}}{5} \\ c = \dfrac{3 \pm \sqrt{39}}{5} \end{array}\right.$

Vậy tồn tại 5 điểm C thoả mãn yêu cầu bài toán là :

$$\left\{ (2;4), \left(\frac{5 \pm \sqrt{15}}{5}; \frac{10 \pm 2\sqrt{15}}{5}\right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{39}}{5}; \frac{6 \pm 2\sqrt{39}}{5}\right) \right\}$$

Thí dụ 35 (Đề 22)
Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy cho điểm A(1; 1) và đường thẳng (Δ) có phương trình y=3. Hãy xác định điểm B ∈(Δ) và C thuộc trục Ox sao cho ΔABC là tam giác đều.

Lời giải

Gọi B(b; 3) thuộc đường thẳng (Δ) và C(c; 0) thuộc trục Ox.

Ta có $AC^2 = (c-1)^2 + 1$,

$AB^2 = (b-1)^2 + (3-1)^2 = (b-1)^2 + 4$,

$BC^2 = (c-b)^2 + (0-3)^2 = (c-b)^2 + 9$

Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow \begin{cases} AC^2 = AB^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-1)^2 + 1 = (b-1)^2 + 4 \\ (c-1)^2 + 1 = (c-b)^2 + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ (I) $\begin{cases} (c-1)^2 = (b-1)^2 + 3 \\ (c-1)^2 = [(c-1)-(b-1)]^2 + 8 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} X = c-1 \\ Y = b-1 \end{cases}$ hệ trở thành

$$\begin{cases} X^2 = Y^2 + 3 \\ X^2 = (X-Y)^2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = Y^2 + 3 \\ Y^2 - 2XY + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = 3 \\ 2XY - Y^2 = 8 \end{cases} \quad (*)$$

- Với Y = 0, từ (2) ⇒ 8 = 0, mâu thuẫn.

Với Y ≠ 0, đặt X = Yt, hệ (II) trở thành $\begin{cases} Y^2(t^2-1) = 3 \\ Y^2(2t-1) = 8 \end{cases}$ (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} 8(t^2-1) = 3(2t-1) \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 6t - 5 = 0 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{4} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ t > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) có $\frac{3}{2}Y^2 = 8 \Leftrightarrow Y^2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow Y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $X = Yt = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Cuối cùng $\begin{cases} c - 1 = X = \pm\frac{5\sqrt{3}}{3} \\ b - 1 = Y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \pm \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{3 \pm 5\sqrt{3}}{3} \\ b = 1 \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{3 \pm 4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy tồn tại hai cặp điểm B và C để ΔABC là tam giác đều

$$\begin{cases} B = (0;\ \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}) \\ C = (\frac{3 + 5\sqrt{3}}{3};\ 0) \end{cases}, \begin{cases} B = (0;\ \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}) \\ C = (\frac{3 - 5\sqrt{3}}{3};\ 0) \end{cases}$$

Thí dụ 36 (TSĐH khối A-2002)

Trong mặt phẳng Oxy cho ΔABC vuông tại A, cạnh BC có phương trình $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, hai điểm A, B thuộc trục hoành. Xác định tọa độ trọng tâm ΔABC, biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra toạ độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} \sqrt{3}(x - 1) - y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow B = (1; 0)$. Gọi $C = (c;\ \sqrt{3}(c - 1))$ là một điểm thuộc (Δ).

Do $A \in Ox$ và ΔABC vuông tại A nên toạ độ của A là $A = (c; 0)$

Ta có $AC = \sqrt{3}\,|c - 1|$, $AB = |c - 1|$, $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2|c - 1|$

Ta có $2S = AB.AC = 2p.r$ hay $AB.AC = (AB + BC + CA)r$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(c - 1)^2 = 2(3 + \sqrt{3})|c - 1|) \Leftrightarrow |c - 1| = 2 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 3 + 2\sqrt{3} \\ c = -1 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Cuối cùng toạ độ trọng tâm tam giác ABC là

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{cases} \text{hay} \begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(c + 1 + c) \\ y_G = \frac{1}{3}(0 + 0 + \sqrt{3}(c - 1)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1 + 2c}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(c - 1)}{3} \end{cases} \quad (*)$$

Với $c = 3 + 2\sqrt{3}$ ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1 + 2(3 + 2\sqrt{3})}{3} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \frac{y_C}{3} = \frac{\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{3} - 1)}{3} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow G_1 = \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Với $c = -1-2\sqrt{3}$ ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{1-2(1+2\sqrt{3})}{3} = -\dfrac{1+4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \dfrac{y_C}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{3}+1)}{3} = -\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow G_1 = \left(-\frac{1+4\sqrt{3}}{3}; -\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy có hai điểm G thoả mãn trọng tâm ΔABC là :

$$G_1 = \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right), G_1 = \left(-\frac{1+4\sqrt{3}}{3}; -\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

BÀI TẬP

Bài 1. Viết phương trình các cạnh và các đường trung trực của tam giác ABC biết trung điểm ba cạnh của BC, CA, AB theo thứ tự là M=(2; 3), N=(4; −1), P=(−3; 5)

Bài 2. Tam giác ABC có ba đỉnh B = (−4; −5) và hai đường cao có phương trình (Δ): 5x + 3y − 4 = 0; (Δ') : 3x + 8y +13=0. Viết phương trình các cạnh của tam giác ấy.

Bài 3. Viết phương trình các cạnh và các đường trung trực của tam giác ABC, biết trung điểm các cạnh là M = (2; 3), N = (4;−1), P = (−3; 5)

Bài 4. Cho tam giác ABC có các đỉnh A = (2; 2), B = (−1; 6), C = (−5; 3)

1) Viết phương trình các cạnh.
2) Viết phương trình đường thẳng chứa đường cao AH.
3) Chứng tỏ ΔABC là tam giác vuông cân.

Bài 5. Viết phương trình các cạnh của ΔABC biết A=(3; 1) và hai đường trung tuyến có phương trình (Δ) : 2x−y−1=0, (Δ') : x − 1 = 0.

Bài 6. Tam giác ABC biết trực tâm H = $(0; \frac{22}{3})$ và hai cạnh có phương trình 3x−y−1=0; 3x+4y−96=0. Viết phương trình các cạnh thứ ba.

Bài 7. Cho tam giác ABC có đỉnh A=(0; 3) và hai đường phân giác trong có phương trình (Δ) : x − y = 0, (Δ') : 2x + y − 6 = 0. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Bài 8. Cho tam giác ABC có đỉnh A = (3; 5), B = (4;−3) và đường phân giác trong góc C có phương trình (Δ) : x + y − 8 = 0. Viết phương trình các cạnh của tam giác ấy.

Bài 9. Tam giác ABC có phương trình cạnh (BC) : 9x + 11y + 5 = 0, hai đường phân giác trong của góc B và C theo thứ tự có phương trình (Δ_B) : 2x − 3y + 12 = 0; (Δ_C) : 2x + 3y = 0. Lập phương trình hai cạnh còn lại.

Bài 10. Tam giác ABC có đỉnh (4;−1), đường phân giác trong và đường trung tuyến kẻ từ A theo thứ tự có phương trình là (l_A) : 2x − 3y + 12 = 0, (Δ) : 2x + 3y = 0. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Bài 11. Một đỉnh của hình thoi có toạ độ là (0; 1), một cạnh có phương trình $x+7y-7=0$ và một đường chéo có phương trình $x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình các cạnh còn lại của hình thoi ấy.

Bài 12. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A(2; 4) và giao điểm hai đường thẳng (Δ_1) : $x+3y-9=0$ và (Δ_2) : $3x-2y-5=0$.

Bài 13. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với đường thẳng $x - y + 4 = 0$ và đi qua giao điểm hai đường thẳng (Δ_1) : $x+3y-1=0$ và (Δ_2) : $3x + 2y - 5 = 0$.

Bài 14. Viết phương trình đường thẳng (Δ) tạo với đường thẳng $x-y-1=0$ một góc 45^0 và đi qua giao điểm hai đường thẳng (Δ_1) : $x + 3y - 8 = 0$ và (Δ_2) : $3x-2y-2=0$.

Bài 15. Cho hai điểm A(3; 1), B(−1; 2) và đường thẳng (Δ) : $x - 2y + 1 = 0$. Tìm điểm $C \in (\Delta)$ sao cho ΔABC là :

1) tam giác cân.

2) tam giác vuông tại C.

Bài 16. Tam giác ABC có A(1;−2), B(2;−3), diện tích S = 4, trọng tâm G thuộc đường thẳng (Δ) : $x-y-2=0$. Tìm toạ độ điểm C.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxy cho hình thoi MNPQ có M(1; 2), phương trình NQ là $x - y - 1 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình thoi biết rằng NQ = 2MP và N có tung độ âm.

Bài 18 (TSĐH-2005) Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1) : x - y = 0 \text{ và } (\Delta_1) : 2x + y - 1 = 0.$$

Tìm toạ độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng $A \in (\Delta_1)$, $C \in (\Delta_2)$ và hai đỉnh còn lại thuộc trục hoành.

Bài 19. (TSĐH-2002)

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Đềcác vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A. Phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$.

Các đỉnh AB thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm toạ độ trọng tâm tam giác ABC.

Bài 20 (TSĐH, A-2004)

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hai điểm A(0; 2) và $B(-\sqrt{3}; -1)$. Tìm toạ độ trực tâm và toạ độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

Bài 21 (TSĐH, B-2004)

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hai điểm A(1; 1) và B(4;−3) . Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

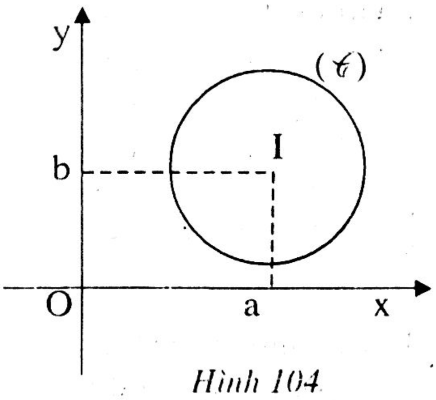
Bài 22

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho ΔABC có đỉnh B(1; 2), đường phân giác trong AD có phương trình $x-y-3=0$, đường trung tuyến CM qua đỉnh C có phương trình $x+4y+9=0$. Lập phương trình đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC.

§2. ĐƯỜNG TRÒN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình đường tròn



Hình 104

Trong mặt phẳng Oxy,

- $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

là phương trình đường tròn tâm I(a; b) bán kính R

- $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, $(A^2+B^2-C\geq 0)$

là phương trình đường tròn tâm

$I(-A; -B)$, bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2-C}$

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$.

- Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm M của

$(\mathscr{C})$: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ là $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$

- Phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm M của

$(\mathscr{C})$: $x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$ là $x_0x+y_0y+A(x_0+x)+B(y_0+y)+C=0$

3. Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

Điều kiện để đường thẳng (Δ) : $Ax+By+C=0$ tiếp xúc với đường tròn tâm I(a, b) bán kính R là

$$d(I, (\Delta))=R \text{ hay } \frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R$$

4. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}) : f(x, y)=x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

Phương tích của điểm M đối với đường tròn $(\mathscr{C})$ là

$$\mathscr{P}_{M/(\mathscr{C})}=f(x_0, y_0)=x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+C$$

5. Trục đẳng phương của hai đường tròn

Cho hai đường tròn không đồng tâm

$$(\mathscr{C}_1) : f_1(x, y)=x^2+y^2+2A_1x+2B_2y+C_1=0$$

$$(\mathscr{C}_2) : f_2(x, y)=x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0$$

Trục đẳng phương của hai đường tròn là

$$2(A_1-A_2)x+2(B_1-B_2)y+C_1-C_2=0.$$

II. CÁC BÀI TOÁN VÀ KỸ THUẬT CƠ BẢN

Bài toán 1. Nhận dạng phương trình đường tròn

Thí dụ 1

Trong các phương trình sau, đâu là phương trình đường tròn ?
Nếu là phương trình đường tròn, hãy cho biết tâm và bán kính ?

1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ 2) $x^2 + y^2 + 3x - 2y + 13 = 0$.
3) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ 4) $x^2 + y^2 - 4xy - 2y - 1 = 0$
5) $x^2 + 3y^2 + 8y - 2y + 1 = 0$

Lời giải

1) *Xét phương trình* $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ (1)

Cách 1 : Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Đó là đường tròn tâm I(2; 1), bán kính R = 3.

Cách 2 : (1) có dạng $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ với $A = \frac{-4}{-2} = 2$, $B = \frac{-2}{-2} = 1$,

$C = -4$, $\Delta = A^2 + B^2 - C = 2^2 + 1^2 + 4 = 9 > 0$ nên (1) là phương trình đường tròn.

Tâm I(2; 1), bán kính $R = \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

2) *Xét phương trình* $x^2+y^2+3x-2y+13=0$. (2)

Phương trình (2) có dạng $x^2 + y^2 + 2Ax+2By+C=0$ với $A=-\frac{3}{2}$, $B=\frac{-2}{-2}=1$, $C=13$

$\Rightarrow \Delta=A^2+B^2-C=\frac{9}{4}+1-13=-\frac{39}{4}<0$ nên (2) không phải là trình đường tròn.

3) $x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$. Đó là phương trình đường tròn tâm I(2; 0), bán kính R=1.

4) $x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 1 = 0$ không phải do có chứa hạng tử 4xy.

5) $x^2+3y^2+8y-2y+1=0$ không phải do hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

Chú ý

1) Trong phương trình đường tròn :
  * Không có mặt hạng tử chứa ẩn xy.
  * Hệ số của x^2 và y^2 bằng nhau.

2) Xét phương trình $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ (4)
  * (4) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow A^2 + B^2 - C \geq 0$.
  * $C < 0$ thì (4) ắt hẳn là phương trình đường tròn.

Thí dụ 2

Cho đường cong $(\mathscr{C})$: $(m^2+1)x^2 + m(m+3)y^2 + 2m(m+1)x - m - 1 = 0$.

Tìm m để $(\mathscr{C})$ là đường tròn.

Lời giải

- Điều kiện cần để $(\mathscr{C})$ là đường tròn là $(m^2+1) = m(m+3) \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

- Khi $m = \frac{1}{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{10}{9}(x^2 + y^2) + \frac{8}{9}x - \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{5}x - \frac{6}{5} = 0$. (*). Thấy rằng (*) có dạng phương trình tổng quát của đường tròn và $C = -\frac{6}{5} < 0$ nên nó là phương trình của một đường tròn.

Bài toán 2. Viết phương trình đường tròn

Thí dụ 3

Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm là điểm $I(-1; 2)$ và thoả mãn một trong các điều kiện sau

1) bán kính $R = 7$
2) đi qua $A(2; 5)$.
3) $\mathcal{P}_{B/(\mathscr{C})} = 1$ trong đó $B = (1; 0)$
4) tiếp xúc với đường thẳng (Δ) : $3x + y + 101 = 0$.
5) chắn trên đường thẳng (Δ') : $x + 2y + 2 = 0$ một dây cung $MN = 2$

Lời giải

1) Phương trình đường tròn tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R=7$ là $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 49$

2) Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ tâm $I(-1; 2)$, bán kính R là

$$(x+1)^2+(y-2)^2=R^2. \qquad (*)$$

- $A(2; 5) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow$ Toạ độ điểm A là nghiệm của phương trình (*)

$\Leftrightarrow (2 + 1)^2 + (5-2)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 18$. Thay vào (*) có phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ là $(x+1)^2+(y-2)^2=18$.

3) Ta có $\mathcal{P}_{B/(\mathscr{C})} = 1 \Leftrightarrow BI^2 - R^2 = 1 \Leftrightarrow (1 + 1)^2 + (0 - 2)^2 - R^2 = 1 \Leftrightarrow R^2 = 7$.

Thay vào (*) có phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ là $(x+1)^2+(y-2)^2=7$.

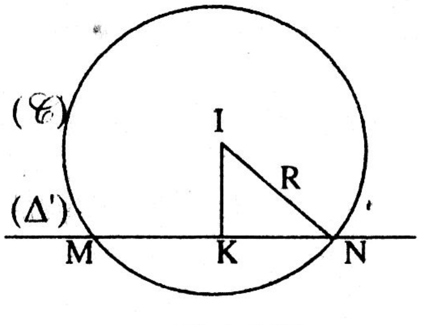
4) Khoảng cách từ I đến đường thẳng (Δ) là

$$d = \frac{|3(-1) + 1.2 + 101|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$$

Đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với đường thẳng (Δ)

$\Leftrightarrow R = d \Leftrightarrow R = \sqrt{10}$ Thay vào (*) có

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$. Đó là phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ mà ta phải tìm.



Hình 105

5) Gọi K là trung điểm MN. Khoảng cách từ I đến đường thẳng (Δ') là $d = IK = \frac{|(-1) + 2.2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$.

Trong ΔIKN vuông tại K ta có $IN^2 = IK^2 + KN^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 = 6$ suy ra $R^2 = IN^2 = 6$. Thay vào (*) có $(x+1)^2+(y-2)^2=6$.

Đó là phương trình của đường tròn $(\mathscr{C})$ mà ta phải tìm.

Thí dụ 4

Viết phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) đi qua A(1; 3) và

$$(\Delta_\alpha) : x\cos\alpha + 2y\sin\alpha - 3\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

là họ đường kính của nó.

Lời giải

- Viết lại (1) $\Leftrightarrow (x-3)\cos\alpha + 2(y+2)\sin\alpha = 0$.

Toạ độ điểm cố định của (Δ_α) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$.

- (Δ_α) là họ đường kính suy ra điểm cố định I(3; −2) chính là tâm của đường tròn ($\mathscr{C}$).

- Phương trình đường tròn($\mathscr{C}$) tâm I(3; −2), bán kính R là

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = R^2 \qquad (*)$$

- A(1; 3)$\in$($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow$ Toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (*)

$\Leftrightarrow (1-3)^2 + (3+2)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 29$. Thay vào (*) cho ta phương trình của đường tròn ($\mathscr{C}$) là $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 29$.

Kỹ thuật 1

Viết phương trình đường tròn có đường kính AB với $A(a_1; b_1)$, $B(a_2; b_2)$.

Lời giải

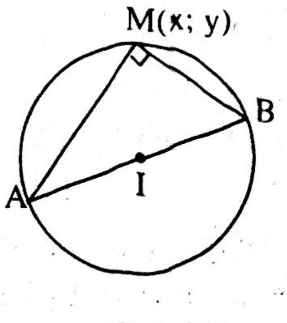
Cách 1. Gọi M(x; y) là một điểm bất kì trong mặt phẳng Oxy, ta có $\overrightarrow{MA} = (x-a_1; x-b_1)$,

$$\overrightarrow{MB} = (x-a_2; x-b_2).$$

- M là một điểm thuộc đường tròn đường kính AB

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-a_1)(x-a_2)+(y-b_1)(y-b_2)=0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a_1 + a_1)x - (b_1+b_2)y + a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. (h 106).



Hình 106

Cách 2. Toạ độ trung điểm I của AB là $I = \left(\dfrac{a_1+a_2}{2}; \dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$

$$AB^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2.$$

Rõ ràng đường tròn đường kính AB là đường tròn có tâm I và bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$.

Do vậy phương trình của đường tròn là

$$\left(x - \frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b_1+b_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}[(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2]$$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a_1 + a_1)x - (b_1 + b_2)y + a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Chẳng hạn

Với A = (1; 0), B = (2; −1). Phương trình đường tròn đường kính AB là:

$$x^2 + y^2 - (1+2)x - (0-1)y + 1.2 + 0(-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x + y + 2 = 0$$

Kỹ thuật 2. Viết phương trình đường tròn qua ba điểm

Thí dụ 5

Viết phương trình đường tròn qua ba điểm A(1; 2), B(5; 2) và C(1; −3).

Lời giải

Giả sử đường tròn $(\mathscr{C})$ cần tìm có phương trình cần tìm là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (1)$$

A, B, C thuộc $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow$ toạ độ của chúng đều là nghiệm của phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2+(2-b)^2=R^2 & (2)\\ (5-a)^2+(2-b)^2=R^2 & (3)\\ (1-a)^2+(-3-b)^2=R^2 & (4) \end{cases}$$

Từ (2) và (3) suy ra $(1-a)^2=(5-a)^2 \Leftrightarrow 4(6-2a)=0 \Leftrightarrow a=3$

Từ (2) và (4) suy ra $(2-b)^2=(3+b)^2 \Leftrightarrow 5(1+2b)=0 \Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$

Thay các giá trị a và b vừa tìm được vào (1) có $R^2=\frac{41}{4}$

Vậy đường tròn (ABC) phải tìm có phương trình là $(x-3)^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{41}{4}$

Chú ý. *Một cách nói khác của bài toán viết phương trình đi qua ba điểm là viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác.*

Thí dụ 6

Tam giác ABC có B(1; 1), C(3; −1), trực tâm H(2; 2).

Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác ấy.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC. Lấy D là điểm đối xứng với H qua I. Suy ra BHCD là hình bình hành $\Rightarrow \angle BHC=\angle BDC$

Mà $\angle BHC+\angle BAC=180^0 \Rightarrow \angle BDC+\angle BAC=180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn hay $D\in(\mathscr{C})$.

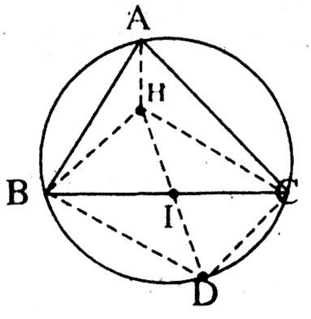
Nói khác đi đường tròn ngoại tiếp ΔABC cũng chính là đường tròn ngoại tiếp ΔBDC.

Ta có $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{HC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-x_B=x_C-x_H\\ y_D-y_C=y_C-y_H \end{cases}$ hay

$\begin{cases} x_D-1=3-2\\ y_D-1=-1-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=2\\ y_D=-2 \end{cases}$. Vậy D=(2; −2)

Giả sử đường tròn $(\mathscr{C})$ cần tìm có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (1)$$



Hình 107

B, C, H thuộc $(\mathscr{C})$ ⇔ toạ độ của chúng đều thoả mãn phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=R^2\\(3-a)^2+(-1-b)^2=R^2\\(2-a)^2+(2-b)^2=R^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-a)^2=R^2-(1-b)^2 & (2)\\(3-a)^2=R^2-(1+b)^2 & (3)\\(2-a)^2=R^2-(2-b)^2 & (4)\end{cases}$$

Trừ vế theo vế các phương trình (2) cho (3) ta có $(1-a)^2-(3-a)^2=(1+b)^2-(1-b)^2$
$\Leftrightarrow 4a-8=4b \Leftrightarrow a-b=2.$ (5)

Trừ vế theo vế các phương trình (2) cho (4) ta có $(1-a)^2-(2-a)^2=(2-b)^2-(1-b)^2$
$\Leftrightarrow 2a-3=3-2b \Leftrightarrow a+b=3$ (6)

Tóm lại ta có hệ $\begin{cases}a-b=2\\a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow \left(a=\dfrac{5}{2};b=\dfrac{1}{2}\right),$ (7)

Thay (7) vào (2) có $R^2=\dfrac{5}{2}$ (8)

Thay (7), (8) vào (1) có $(x-\dfrac{5}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{5}{2}$

Đó là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời bình

Bạn cũng có thể lấy E đối xứng với H qua trục BC. Dễ dàng chứng minh $E\in(\mathscr{C})$. Bởi thế đường tròn $(\mathscr{C})$ phải tìm chính là đường tròn qua ba điểm B, C và E.

Thí dụ 7 (ĐHQG-1996)

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh đặt trên ba đường thẳng $(\Delta_1): 5y = x - 2$; $(\Delta_2): y = x + 2$; $(\Delta_3): y = 8 - x$

Lời giải

Gọi $A=(\Delta_2)\cap(\Delta_3)$; $B=(\Delta_3)\cap(\Delta_1)$; $C=(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$ suy ra :

Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases}y=x+2\\y=8-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$. Vậy B=(3; 5)

Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases}5y=x-2\\y=x+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$. Vậy C=(−3; −1).

Để ý $(\Delta_2)\perp(\Delta_3) \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A ⇔ BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Toạ độ trung điểm I của BC là $\begin{cases}x=\dfrac{3-3}{2}=0\\y=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$

Vậy I=(0; 2). $IB^2=(3-0)^2+(5-2)^2=18$

Phương trình đường tròn tâm I bán kính R=IB là $x^2+(y-2)^2=18$.

Đó chính là phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC mà ta phải tìm.

Lời bình

Sự "may mắn" (*có ý*) : $(\Delta_2)\perp(\Delta_3)$ đem lại lời giải ngắn gọn cho bài toán trên. Nếu không có gì đặc biệt, để có lời giải bài toán thường phải tìm đầy đủ toạ độ các đỉnh.

Kỹ thuật 3. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác

Mấu chốt của bài toán viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác là tính toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp.

- *Tâm là giao của hai đường phân giác trong.*
- *Bán kính nội tiếp có thể tính bằng công thức khoảng cách giữa tâm và cạnh hoặc công thức* $r=\dfrac{S}{p}$

Thí dụ 8 (ĐH Ngoại ngữ-2000)

Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC trong đó A(−1; 7), B(4; −3),C(−4; 1).

Lời giải

Áp dụng công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$ là $\dfrac{x-x_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{y-x_P}{y_Q-y_P}$ (với $x_P\neq x_Q$, $y_P\neq y_Q$)

- Phương trình cạnh (AB) : $\dfrac{x+1}{4+1}=\dfrac{y-7}{-3-7}\Leftrightarrow 2x+y-5=0$
- Phương trình cạnh (BC) : $\dfrac{x-4}{-4-4}=\dfrac{y+3}{1+3}\Leftrightarrow x+2y+2=0$
- Phương trình cạnh (AC) : $\dfrac{x+1}{-4+1}=\dfrac{y-7}{1-7}\Leftrightarrow 2x-y+9=0$
- Phương trình các đường phân giác tạo bởi các cạnh (AB), (BC) là

$$\frac{2x+y-5}{\sqrt{2^2+1^2}}=\pm\frac{x+2y+2}{\sqrt{2^2+1^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+y-5=x+2y+2\\2x+y-5=-x-2y-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y-7=0\\x+y-1=0\end{array}\right.$$

Xét f(x, y)=x+y−1, ta có $\begin{cases}f(A)=-1+7-1=5>0\\f(C)=-4+1-1=-4<0\end{cases}$

⇒ x + y − 1=0 là đường phân giác trong góc B. (1)

- Phương trình các đường phân giác tạo bởi các cạnh (AC), (BC) là

$$\frac{2x-y+9}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\pm\frac{x+2y+2}{\sqrt{2^2+1^2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y+9=x+2y+2\\2x-y+9=-x-2y-2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3y+7=0\\3x+y+11=0\end{array}\right.$$

Xét h(x, y)=3x+y+7, ta có $\begin{cases}h(A)=3(-1)+7+11=15>0\\h(B)=3.4-3+11=20>0\end{cases}$

$\Rightarrow$ x–3y+7=0 là đường phân giác trong góc C. (2)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Từ (1), (2) suy ra toạ độ của I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-3y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$. Vậy I = (–1; 2).

- Bán kính của đường tròn nội tiếp bằng khoảng cách từ I đến cạnh (AB) hay $r=\dfrac{|2(-1)+2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$.

Phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là $(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

Thí dụ 9 (ĐH Huế-1997)
Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ trực chuẩn Oxy cho hai đường thẳng (Δ_1) : 4x+3y–12=0, (Δ_2) : 4x–3y–12=0. Viết phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC biết rằng các cạnh của tam giác đặt trên trục tung và hai đường thẳng nói trên.

Lời giải

Cách 1 (h 108) : Gọi $A=(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$, $B = Oy\cap(\Delta_1)$, $C = Oy\cap(\Delta_2)$. Suy ra :

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y-12=0 \\ 4x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy A= (3; 0).

Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ 4x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$. Vậy B = (0; 4).

Toạ độ C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ 4x-3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \end{cases}$. Vậy C=(0; –4)

Để ý $\begin{cases} OB=OC=4 \\ AB=AC=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5 \end{cases}$

$\Rightarrow$Tam giác ABC cân tại A và y=0 là phân giác trong góc A. (1)

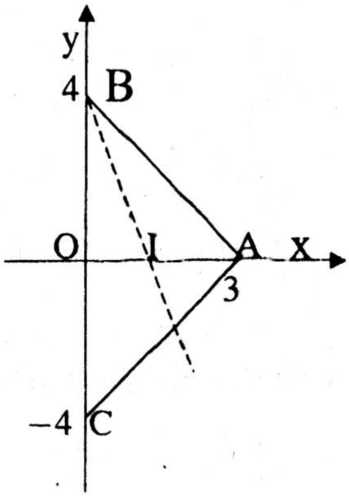
Phương trình các đường phân giác tạo bởi BC và BA là

$$\frac{4x+3y-12}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\pm x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3y-12=5x \\ 4x+3y-12=-5x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y+12=0 \\ 3x+y-4=0 \end{array}\right.$$

Xét f(x, y)=x –3y +12 , ta có

$$\begin{cases} f(A)=1.3-3.0+12=16>0 \\ f(C)=1.0-3(-4)+12>0 \end{cases}$$



Hình 108

$\Rightarrow$ Đường phân giác trong góc B là đường thẳng có phương trình 3x+y–4=0. (2)

Từ (1), (2) suy ra toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}3x+y-4=0\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ y=0\end{cases}. \text{ Vậy } I=\left(\dfrac{4}{3};\ 0\right)$$

Khoảng cách từ I đến cạnh BC là $IO=|x_I|=\frac{4}{3} \Rightarrow r=\frac{4}{3}$.

Phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

Cách 2 : (Tiếp nối từ (1))

Ta có diện tích ΔABC là $S = OB.OA = 4.3 = 12$ (đvdt)

Nửa chu vi ΔABC là $p=OB+BA=4+5=9$ (đvd). Suy ra $r=\frac{S}{p}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ (đvd)

Do OA là đường phân giác trong góc A nên $I\in OA \Rightarrow x_I = r = \frac{4}{3}$

Từ đó suy ra phương trình đường tròn nội tiếp ΔABC là: $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Kỹ thuật 4

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại tiếp điểm.

(Sử dụng cách viết đường thẳng đi qua một điểm và có vectơ pháp tuyến cho trước)

Thí dụ 10

Cho điểm M(2; −1) và đường cong $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ (1)

1) Đặt tên cho đường cong $(\mathscr{C})$.

2) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ tại điểm M.

Lời giải

1) *Đặt tên cho đường cong* $(\mathscr{C})$.

Phương trình (1) có dạng phương trình tổng quát của đường tròn

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \text{ với } A=-1,\ B=3,\ C=-15<0$$

$\Rightarrow (\mathscr{C})$ là đường tròn. Tâm của $(\mathscr{C})$ là $I=(-1\ ;\ 3)$.

2) *Viết phương trình tiếp tuyến.*

Cách 1: Thay toạ độ của M vào vế trái của (1) có $2^2+(-1)^2+2.2-6(-1)-15=0$

$\Rightarrow$ M nằm trên đường tròn và $\overrightarrow{IM}=(4;-4)$ (*)

Tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M là đường thẳng qua M, nhận $\vec{n}=\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến nên tiếp tuyến có phương trình là $4.(x-2)-4.(y+1)=0$

$\Leftrightarrow x-y-3=0$.

Cách 2 : (tiếp nối từ (*))

Gọi N(x; y) là một điểm trong mặt phẳng toạ độ, $\overrightarrow{NM} = (x + 1; y - 3)$.

Điểm N thuộc tiếp tuyến của đường tròn tại M ⇔ IM⊥MN

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{NM} = 0 \Leftrightarrow 4(x + 1) - 4(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0.$

Thí dụ 11(Đề 46)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$.

Gọi (Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M Chứng minh :

1) Nếu $(\mathscr{C})$ có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (1)

thì (Δ) có phương trình $(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$

2) Nếu $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

thì (Δ) có phương trình $x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0$

Lời giải

1) Từ (1) ⇒ $(\mathscr{C})$ có tâm là I(a; b); $\overrightarrow{IM_0}(x_0 - a; y_0 - b) \pm$

- Đường thẳng(Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M ⇔ (Δ) đi qua M và nhận $\overrightarrow{MM_0}$ làm vectơ pháp tuyến ⇔ (Δ) có phương trình

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)[(x - a) + (a - x_0)] + (y_0 - b)[(y - b) + (b - y_0)] = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) - (a - x_0)^2 + (y_0 - b)(y - b) - (b - y_0)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = IM_0^2$

$\Leftrightarrow (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2$ (đpcm) (2)

2) Khai triển (2) ⇔ $x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + a^2 + b^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0$ (đpcm)

Kỹ thuật 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ một điểm cho trước

(*Sử dụng điều kiện tiếp xúc*: *Đường thẳng* $(\Delta) : Ax + By + C = 0$ *tiếp xúc với đường tròn* (I, R) *khi và chỉ khi* $d(I, (\Delta)) = R$).

Thí dụ 12

Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ điểm M(3; 1) đến đường tròn

$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ (1)

Lời giải

Thay toạ độ điểm M vào vế trái của (1) có $3^2 + 1^2 - 4.3 + 2.1 + 2 = 2 > 0$

⇒ Điểm M nằm ngoài đường tròn $(\mathscr{C})$ nên tồn tại tiếp tuyến của nó đi qua điểm M.

- $(\mathscr{C})$ có tâm là $I=(2;-1)$ và bán kính $R = 2^2 + (-1)^2 - 2 = 1$
- Phương trình đường thẳng (Δ) qua M có dạng $a(x-3)+b(y-1)=0$.
  $(a^2+b^2>0)$ (1)
- Khoảng cách từ I đến (Δ) là $d=\dfrac{|a(2-3)+b(-1-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- (Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d=R \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

$\Leftrightarrow (a+2b)^2=(a^2+b^2) \Leftrightarrow b(4a+3b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right., (a^2+b^2>0)$

* Với $b=0$, chọn $a=1$, thay vào (1) có $x-3=0$.

* Với $4a+3b=0$, chọn $(a=3, b=4)$ thay vào (1) có $3(x-3)+4(y-1)=0$.

$\Leftrightarrow 3x+4y-13=0$

Vậy qua $M(3;1)$ kẻ được hai tiếp tuyến tới đường tròn $(\mathscr{C})$ là

$(\Delta_1): x-3=0$, $(\Delta_2): 3x+4y-13=0$.

Chú ý

1) Kỹ thuật 6 cũng áp dụng được cho trường hợp điểm M nằm trên đường tròn.

2) Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn có phương trình $f(x;y)=x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

* Nếu $f(x_0;y_0)<0 \Leftrightarrow$ Điểm $(x_0;y_0)$ nằm trong $(\mathscr{C})$, không có tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ đi qua $(x_0;y_0)$.

* Nếu $f(x_0;y_0)=0 \Leftrightarrow$ Điểm $(x_0;y_0)$ nằm trên $(\mathscr{C})$, có duy nhất một tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ đi qua $(x_0;y_0)$.

* Nếu $f(x_0;y_0)>0 \Leftrightarrow$ Điểm $(x_0;y_0)$ nằm ngoài$(\mathscr{C})$, có đúng hai tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ đi qua $(x_0;y_0)$

- Cần chú ý kiểm tra giá trị $f(x_0;y_0)$. Bài toán có kết luận ngay khi $f(x_0;y_0)<0$.

Thí dụ 13

Cho đường tròn $(\mathscr{C}): f(x,y)=x^2+y^2+2x-4y+4=0$ (1)

1) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ kẻ từ điểm $A(3;5)$

2) Gọi F, F là các tiếp điểm của các tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ nói ở câu 1.
Viết phương trình đường thẳng nối E và F.

3) Tính độ dài đoạn thẳng EF.

Lời giải

1) Ta có $f(A)=3^2+5^2-4.3+6.5+4=56>0 \Rightarrow$ Điểm M nằm ngoài đường tròn $(\mathscr{C})$ nên tồn tại tiếp tuyến của nó đi qua điểm M.

- $(\mathscr{C})$ có tâm là $I=(-1;2)$ và bán kính $R=(-1)^2+2^2-4=1$
- Phương trình đường thẳng (Δ) qua A có dạng $a(x-3)+b(y-5)=0$.
  $(a^2+b^2>0)$ (1)

- Khoảng cách từ I đến (Δ) là $d = \dfrac{|a.(-1-3)+b(2-5)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|4a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- (Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow \dfrac{|4a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$

$\Leftrightarrow (4a+3b)^2 = (a^2+b^2) \Leftrightarrow 15a^2 + 24ab + 8b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2b \\ a = -4b \end{array}\right., (a^2+b^2>0)$

* Với $a=-2b$, chọn ($a = 2$; $b=-1$) thay vào (1) có $2(x-3)-(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

* Với $a=-4b$, chọn ($a = 4$, $b=-1$) thay vào (1) có $4(x-3)-(y-5)=0$.

$\Leftrightarrow 4x - y - 7 = 0$

Vậy qua A(3; 5) kẻ được hai tiếp tuyến tới đường tròn $(\mathscr{C})$ là

$$(\Delta_1): 2x-y-1=0,\ (\Delta_2): 4x-y-7=0$$

2) Theo kết quả Thí dụ 11, phương trình tiếp tuyến (Δ) của $(\mathscr{C})$ tại tiếp điểm $(x_0; y_0)$ là $x_0x + y_0y + (x_0 + x) - 2(y_0 + y) + 4 = 0$ (2)

$A \in (\Delta) \Leftrightarrow$ toạ độ điểm A nghiệm phương trình (2)

$\Leftrightarrow x_0 3 + y_0 5 + (x_0 + 3) - 2(y_0 + 5) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x_0 + 3y_0 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ Điểm $(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng $4x+3y-3=0$ (3)

- Hai điểm E và F đều là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ A nên (3) là phương trình đường thẳng EF mà ta phải tìm.

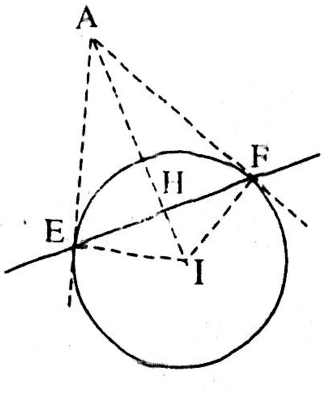
3) Gọi $H = EF \cap IA$. Ta có $IH \perp EF$

$\Rightarrow$ độ dài đoạn thẳng IH chính là khoảng cách từ I đến đường thẳng FF. Bởi thế

$IH = \dfrac{|4(-1)+3.2-3|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5}$. Trong tam giác IHE vuông tại H có $HE^2 = IE^2 - IH^2$ hay

$HE^2 = R^2 - IH^2 = 1 - \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{24}{25} \Leftrightarrow HE = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Ta có $EF = 2HE = \dfrac{4\sqrt{6}}{5}$ (đvd) (h 109)



Hình 109

Lời bình.

Bài toán yêu cầu viết phương trình đường tròn EF mà không yêu cầu tìm toạ độ các tiếp điểm E, F. Lời giải trên đã tránh các tính toán không cần thiết

Kỹ thuật 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn có phương cho trước

Thí dụ 14

Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 73 = 0$.

Lời giải

Tâm và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}$) là I(2; −1), $R=\sqrt{2^2+(-1)^2-4}=1$

Đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng x+2y+73=0 ⇔ (Δ) có phương trình

$2x-y+m=0.(m\in R)$ (1)

Khoảng cách từ I đến (Δ) là $d=\frac{|2.2-1(-1)+m|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}$

- (Δ) và ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi d=R ⇔ $\frac{|m+5|}{\sqrt{5}}=1$

⇔ $m=-5\pm\sqrt{5}$.

Thay vào (1) ta có hai đường thẳng cần tìm là : $2x-y-5\pm\sqrt{5}=0$

Thí dụ 15 (ĐH Tài chính Kế toán-1997)

Cho đường tròn ($\mathscr{C}$) : $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ và điểm M(2; 4)

a) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua M và cắt đường tròn ($\mathscr{C}$) tại hai điểm A và B sao cho M là trung điểm AB.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn có hệ số góc k = −1

Lời giải

a) Tâm và bán kính của ($\mathscr{C}$) là I(1; 3), R=2 và $\overrightarrow{IM}=(1;1)$

Ta có M là trung điểm AB ⇔ IM⊥AB. Bởi vậy đường thẳng (Δ) thoả mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng đi qua M và nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến ⇔ Phương trình của (Δ) là $(x-2)+(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$

b) Phương trình đường tròn (Δ') có hệ số góc k = −1 có dạng $y=-x+b$

$\Leftrightarrow x+y-b=0$ (1)

- (Δ') là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}$) ⇔ d(I, (Δ'))=R ⇔ $\frac{|1+3-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2 \Leftrightarrow |b-4|=2\sqrt{2}$

⇔ $b=4\pm2\sqrt{2}$.

Thay vào (1) có hai tiếp tuyến cần tìm là : $x+y-4\pm2\sqrt{2}=0$.

Thí dụ 16

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn ($\mathscr{C}$) : $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng (Δ) $x+2y+5=0$ một góc 45^0.

Lời giải

- ($\mathscr{C}$) có tâm là I(−1; 2), bán kính $R=\sqrt{(-1)^2+2^2-4}=1$.

Gọi (Δ') là đường thẳng có phương trình 2x−y+5=0.

Rõ ràng (Δ')⊥(Δ).

- Phương trình các đường phân giác $l_{1,2}$ của góc tạo bởi hai đường thẳng (Δ) và (Δ')

là $\frac{x+2y+5}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{2x-y}{\sqrt{1^2+2^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(l_1):\ x-3y-5=0\\ (l_2):\ 3x+y+5=0\end{array}\right.$

- Đường thẳng (a) hợp với (Δ) một góc $45^0 \Leftrightarrow (\mathscr{D})$ cùng phương với một trong hai đường phân giác nói trên.

Xét đường thẳng $(\mathscr{D}_1)//(l_1)$ có phương trình $x-3y+m=0$ (1)

Khoảng cách từ I đến $(\mathscr{D}_1)$ là $d=\dfrac{|-1-3.2+m|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\dfrac{|m-7|}{\sqrt{10}}$

Đường thẳng $(\mathscr{D}_1)$ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-7|}{\sqrt{10}}=1$

$\Leftrightarrow m=7\pm\sqrt{10}$. Thay vào (1) ta có hai tiếp tuyến cần tìm của $(\mathscr{C})$ là

$x-3y+7\pm\sqrt{10}=0$ (2)

Xét đường thẳng $(\mathscr{D}_2)//(l_2)$ có phương trình $3x+y+m'=0$ (3)

Khoảng cách từ I đến $(\mathscr{D}_2)$ là $d=\dfrac{|3(-1)+2+m'|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|m'-1|}{\sqrt{10}}$

Đường thẳng $(\mathscr{D}_2)$ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d=R \Leftrightarrow \dfrac{|m'-1|}{\sqrt{10}}=1$

$\Leftrightarrow m'=1\pm\sqrt{10}$. Thay vào (1) ta có hai tiếp tuyến cần tìm của $(\mathscr{C})$ là

$3x+y+1\pm\sqrt{10}=0$ (4)

Từ (2), (4) kết luận : Đường tròn $(\mathscr{C})$ có bốn tiếp tuyến hợp với đườmg thẳng (Δ) một góc 45^0 là $x-3y+7\pm\sqrt{10}=0$, $3x+y+1\pm\sqrt{10}=0$.

Bài toán 3. Đường tròn và sự tiếp xúc

(Đường tròn tiếp xúc với đường thẳng, đường tròn tiếp xúc với đường tròn)

Thí dụ 17

Tìm điều kiện của a để đường thẳng (Δ) : $x+(a-1)y+a=0$ tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-2x+6y+9=0$

Lời giải

Tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ là $I=(1;-3)$, $R=\sqrt{1^2+(-3)^2-9}=1$

Khoảng cách từ tâm I đến đường tròn (Δ) là

$$d=\frac{|1-3(a-1)+a|}{\sqrt{1^2+(a-1)^2}}=\frac{|2(2-a)|}{\sqrt{1^2+(a-1)^2}}$$

- (Δ) và $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi $d=R \Leftrightarrow \dfrac{|2(2-a)|}{\sqrt{1^2+(a-1)^2}}=1$

$\Leftrightarrow 4(2-a)^2=1+(a-1)^2 \Leftrightarrow 3a^2-14a+15=0 \Leftrightarrow \{a=3;\ a=\dfrac{5}{3}\}$

Thí dụ 18 (Đề 46)

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$(\mathscr{C}_1)$: $x^2+y^2-10x+24y+56=0$, $(\mathscr{C}_2)$: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

Lời giải

Tâm và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}_1$) là $I_1=(5;-12)$,

$$R_1=\sqrt{5^2+(-12)^2-56}=15$$

Tâm và bán kính của đường tròn ($\mathscr{C}_2$) là $I_2=(1;2)$,

$$R_2=\sqrt{1^2+2^2+10}=5$$

Gọi (Δ) là tiếp tuyến có phương trình $y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$ (1)

- (Δ) là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}_1$) $\Leftrightarrow d(I_1,(\Delta)) = R_1 \Leftrightarrow \dfrac{|5a+12+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=15$

$\Leftrightarrow |5a + b + 12| = 15\sqrt{a^2+1}$

- (Δ) là tiếp tuyến của ($\mathscr{C}_2$) $\Leftrightarrow d(I_2,(\Delta)) = R_2 \Leftrightarrow \dfrac{|a-2+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=5$

$\Leftrightarrow |a + b - 2| = 5\sqrt{a^2+1}$

- (Δ) là tiếp tuyến chung của ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) $\Leftrightarrow \begin{cases}|5a+b+12|=15\sqrt{a^2+1}\\ |a+b-2|=5\sqrt{a^2+1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|5a+b+12|=3|a+b-2|\\ |a+b-2|=5\sqrt{a^2+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}5a+b+12=3(a+b-2)\\ 5a+b+12=-3(a+b-2)\end{array}\right.\\ |a+b-2|=5\sqrt{a^2+1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{ll}b=a+9 & (2)\\ b=-\dfrac{2a+3}{4} & (3)\end{array}\right.\\ |a+b-2|=5\sqrt{a^2+1} \quad (4)\end{cases}$$

Thay (2) vào (4) có $|2a + 7| = 5\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow (2a+7)^2 = 25(a^2+1)$

$\Leftrightarrow 21a^2 - 28a - 24 = 0 \Leftrightarrow b=\dfrac{14\pm10\sqrt{7}}{21}$ (5)

Thay (5) vào (2) : $\left[\begin{array}{l}\text{với } a=\dfrac{14+10\sqrt{7}}{21}\Rightarrow b=\dfrac{203+10\sqrt{7}}{21}\\ \text{với } a=\dfrac{14-10\sqrt{7}}{21}\Rightarrow b=\dfrac{203-10\sqrt{7}}{21}\end{array}\right.$ (6)

Thay (6) vào (1) thu được hai phương trình tương ứng là :

$(14+10\sqrt{7})x - 21y + 203 + 10\sqrt{7} = 0$,

$(14-10\sqrt{7})x - 21y + 203 - 10\sqrt{7} = 0$ (7)

Thay (2) vào (3) có $\dfrac{|2a-4|}{4} = 5\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow (2a-3)^2 = 80(a^2+1)$

$\Leftrightarrow 76a^2 + 64a + 79 = 0$ (vô nghiệm) (8)

Thấy rằng $I_1I_2=\sqrt{(1-5)^2+(2+12)^2}=2\sqrt{53}<R_1$

$\Leftrightarrow$ Hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau (9)

Từ (7), (8), (9) kết luận hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có và chỉ có hai tiếp tuyến chung là $(14+10\sqrt{7})x-21y+203+10\sqrt{7}=0$,

$(14-10\sqrt{7})x-21y+203-10\sqrt{7}=0$.

Thí dụ 19 (TSĐH, 2005)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hai điểm A(2; 0) và B(6; 4).

Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với trục hoành tại A và khoảng cách từ tâm của $(\mathscr{C})$ đến B bằng 5.

Lời giải

Gọi I(a; b) là tâm của $(\mathscr{C})$. Ta có $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với trục hoành tại A

$\Leftrightarrow$ a=2 và R=|b| hay phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng $(x-2)^2+(y-b)^2=b^2$ (1)

Ta có $IB^2=(6-2)^2+(4-b)^2$. Mà $IB=5\Leftrightarrow 16+(4-b)^2=5^2\Leftrightarrow(4-b)^2=9$

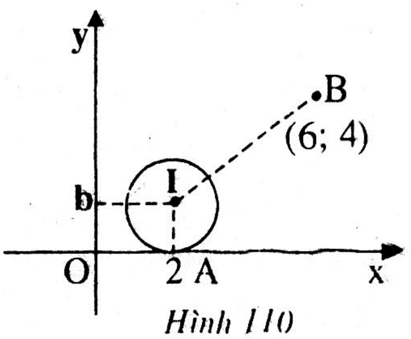
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b-4=3\\b-4=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=7\\b=1\end{array}\right.. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) :

* Với b=7 có $(\mathscr{C}_1):(x-2)^2+(y-7)^2=49$

* Với b=1 có $(\mathscr{C}_2):(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(h110)



Hình 110

Thí dụ 20 (ĐH Cần Thơ, A-2000, CĐ Kỹ thuật 1- 2001)

Cho họ đường tròn $(\mathscr{C}_m): x^2+y^2-(2m+5)x+(4m-1)y+4=0$.

1) Chứng minh $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua một điểm cố định.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để $(\mathscr{C}_m)$ tiếp xúc với trục tung.

Lời giải

1) Viết lại (1) $\Leftrightarrow 2(2y-x+1)m+x^2+y^2-5x-y+4=0$.

Toạ độ điểm cố định của $(\mathscr{C}_m)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}2y-x+1=0\\x^2+y^2-5x-y+4=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+1\\5y^2-7y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+1\\\left\{y=0;y=\dfrac{7}{5}\right\}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x=1;\ y=0)\\\left(x=\dfrac{19}{5};\ y=\dfrac{7}{5}\right)\end{array}\right..$$

Vậy khi m thay đổi, họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định O(1; 0) và $A\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.

2) Tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_m)$ là :

$$I\left(\frac{2m+5}{2};\frac{4m-1}{2}\right),\quad R=\sqrt{\frac{(2m+5)^2}{4}+\frac{(4m-1)^2}{4}+2m-4}$$

Khoảng cách từ I đến trục tung là $d = |x_I| = \dfrac{|2m+5|}{2}$

- $(\mathscr{C}_m)$ tiếp xúc với trục tung $\Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow d^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m+5)^2}{4}=\frac{(2m+5)^2}{4}+\frac{(4m-1)^2}{4}+2m-4 \Leftrightarrow 16m^2=15 \Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Vậy tập hợp giá trị phải tìm của m là $m = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Thí dụ 21 (ĐH Bách Khoa, 1997)

Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua A(2;−1) và tiếp xúc với hai trục tọa độ.

Lời giải

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm và R là bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

- $A\in(\mathscr{C}) \Rightarrow x_I > 0 > y_I$ (1)
- $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với hai trục toạ độ $\Rightarrow |x_I|=|y_I|=R$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} x_I = a = R \\ y_I = -a \end{cases}$ (với a là số thực dương). Do vậy phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$ (3)

- $A\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow (2-a)^2+(-1+a)^2=a^2 \Leftrightarrow a^2-6a+5=0 \Leftrightarrow \{a=1; a=5\}$ (4)

Thay (4) vào (3) thu được hai phương trình đường tròn cần tìm là :

$(\mathscr{C}_1) : (x-1)^2+(y+1)^2=1$ (ứng với a = 1)

$(\mathscr{C}_2) : (x-5)^2+(y+5)^2=25$ (ứng với a = 5)

Thí dụ 22 **(ĐH Dược Hà Nội, 2000)**

Cho các đường tròn

$(\mathscr{C}) :\ x^2+y^2=1$

$(\mathscr{C}_m):\ x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0.$ (1)

a) Tìm quỹ tích tâm các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ khi m thay đổi.

b) Chứng minh rằng có hai đường tròn $(\mathscr{C}_{m_1})$ và $(\mathscr{C}_{m_2})$ tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$, ứng với hai giá trị m_1, m_2 của m.

c) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(\mathscr{C}_{m_1})$ và $(\mathscr{C}_{m_2})$ ở trên.

Lời giải

a) *Tìm quỹ tích tâm các đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.*

Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $c=-5<0, \forall m$ suy ra (1) là phương trình đường tròn.

Toạ độ tâm I của $(\mathscr{C}_m)$ là $I\begin{cases} x_I = m+1 \\ y_I = -2m \end{cases} \Rightarrow 2x_I + y_I - 2 = 0$

$\Rightarrow$ Toạ độ I thỏa mãn phương trình $2x + y - 2 = 0$.

Vậy khi m thay đổi, quỹ tích tâm I của $(\mathscr{C}_m)$ là đường thẳng $2x + y - 2 = 0$.

b) *Chứng minh rằng có hai đường tròn* $(\mathscr{C}_{m_1})$ *và* $(\mathscr{C}_{m_2})$ *tiếp xúc với đườngtròn* $(\mathscr{C})$.

$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 1$ có tâm là $O(0;\ 0)$ bán kính $R = 1$.

$(\mathscr{C}_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$ có tâm là $I(m+1;-2m)$, bán kính

$R_m = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2 + 5} = \sqrt{5m^2 + 2m + 6}$

- Khoảng cách giữa hai tâm là $OI = \sqrt{(m+1)^2 + (-2m)^2} = \sqrt{5m^2 + 2m + 1}$
- Để ý $OI < R_m \Rightarrow$ khả năng hai đường tròn tiếp xúc ngoài không thể xảy ra.
- Hai đường tròn tiếp xúc trong $\Leftrightarrow |R_m - R| = OI$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{5m^2 + 2m + 6} - 1\right| = \sqrt{5m^2 + 2m + 1} \Leftrightarrow \sqrt{5m^2 + 2m + 6} = 3$

$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$. Thay vào (1) thu được hai đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$ là

$(\mathscr{C}_1) : x^2+y^2-4y-5=0$ (ứng với $m=-1$).

$(\mathscr{C}_2) : x^2+y^2 - \frac{16}{5}x + \frac{12}{5}y - 5 = 0$ (ứng với $m=\frac{3}{5}$).

c) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ *và* $(\mathscr{C}_2)$.

Gọi I_1; R_1; I_2; R_2 theo thứ tự là tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

Ta có $I_1 = (0;\ 2)$, $R_1 = \sqrt{4+5} = 3$, $I_2 = \left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$, $R_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 5} = 3$

$\overrightarrow{I_1I_2} = \left(\frac{8}{5} - 0; -\frac{6}{5} - 2\right) = \left(\frac{8}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, $I_1I_2 = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{6}{5} - 2\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

Rõ ràng $I_1I_2 < R_1 + R_2 = 6 \Rightarrow (\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau $\Rightarrow$ Chúng có hai tiếp tuyến chung ngoài. Gọi hai tiếp tuyến chung ấy là (Δ_1), (Δ_2).

Lại có $R_1 = R_2 (=3)$ nên $(\Delta_1)//(\Delta_2)//\ I_1I_2$. Bởi thế nên có thể chọn $\vec{n} = (2;\ 1)$ (một vectơ vuông góc với $\overrightarrow{I_1I_2}$) làm vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$.

Phương trình đường thẳng (Δ) nhận $\vec{n}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng

$2x + y + m = 0$. (2)

- (Δ) là tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2$ $\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ I_1 đến đường thẳng $2x + y + m = 0$ bằng $R_1 = R_2 = 3 \Leftrightarrow d = \frac{|2.0 + 2 + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{5}} = 3$

$\Leftrightarrow m = -2 \pm 3\sqrt{5}$.

Thay vào (1) thu được hai phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ là:

$$2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0$$

Thí dụ 23 (ĐHDL Hùng Vương, C-2000)

Cho họ đường tròn $(\mathscr{C}_m): x^2 + y^2 - 2(m-1)x - 2m^2y + m^4 = 0$ (1)

a) Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn này khi m thay đổi.

b) Hãy chứng tỏ rằng các đường tròn trong họ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Tìm đường thẳng đó.

Lời giải

a) Viết lại (1) $\Leftrightarrow (x + m - 1)^2 + (y - m^2)^2 = (m-1)^2$

Với mọi $m \neq 1$, $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn có tâm $I\begin{cases} x_I = 1 - m \\ y_I = m^2 \end{cases} \Rightarrow y_I = (x_I - 1)^2$

Toạ độ điểm I thoả mãn phương trình $y = (x-1)^2 \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 1$.

Chú ý $m \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

Vậy khi m thay đổi $(m \neq 1)$ quỹ tích I là parabol $y = x^2 - 2x + 1$ với $x \neq 0$.

b) Bán kính của $(\mathscr{C}_m)$ là $R = |m-1|$

Khoảng cách từ I đến trục tung là $d = |x_I| = |m-1|$

Vậy $d = R = (|m-1|)\ \forall m \Rightarrow (\mathscr{C}_m)$ luôn tiếp xúc với trục tung.

Thí dụ 24 (ĐHQG, 1995)

Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(0; 1) và tiếp xúc với Ox.
Tìm quỹ tích tâm của đường tròn đó.

Lời giải

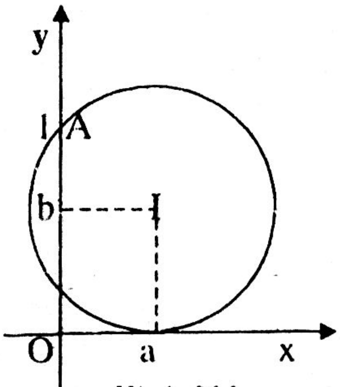
Gọi I(a; b) là tâm đường tròn $(\mathscr{C})$ cần tìm.

- $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow R = |b|$ suy ra phương trình của $(\mathscr{C})$ có dạng :

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ (1)

- $A \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow$ Toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (1) tức là $(0-a)^2 + (1-b)^2 = b^2$

$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(a^2 + 1)$. Suy ra quỹ tích điểm I là đường parabol $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. (h 111)



Hình 111

Bài toán 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Thí dụ 25 (ĐH An Ninh, D-2001)

Trong các cặp nghiệm của bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$ (1) hãy tìm cặp nghiệm có $x + 3y$ nhỏ nhất.

Lời giải

Cách 1 : Viết lại : (1) ⇔ $x^2+y^2-3x-3y+\frac{8}{5}\le 0$ (2)

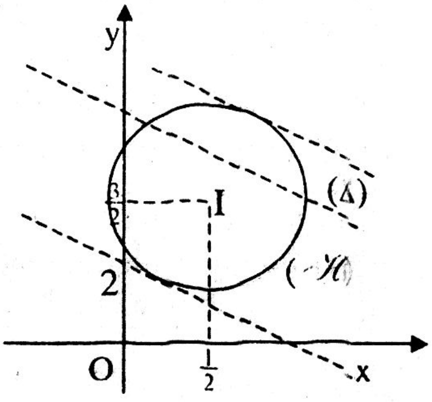
Xét hình $(\mathcal{H})$: $x^2+y^2-x-3y+\frac{8}{5}\le 0$ – đó là hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{3}{\sqrt{10}}$, và đường thẳng (Δ) : x+3y = m ⇔ x + 3y − m = 0

Giao của (Δ) và $(\mathcal{H})$ là các điểm có toạ độ (x; y) thoả mãn bất phương trình (1) và có x+3y=m.

Khoảng cách từ I đến (Δ) là $d=\frac{\left|\frac{1}{2}+3\cdot\frac{3}{2}-m\right|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|m-5|}{\sqrt{10}}$

- (Δ) cắt hình tròn $(\mathcal{H})$ ⇔ d≤R ⇔ $\frac{|m-5|}{\sqrt{10}}\le\frac{3}{\sqrt{10}}$ ⇔ $|m-5|\le 3$ ⇒ $m-5\ge -3$

⇔ m ≥ 2. Từ đó suy ra $\min\limits_{(x,y)\in D}(x+3y)=2$



Hình 112

Cách 2 : (Tiếp nối từ (2)– h 112)

- (2) ⇔ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}-\frac{8}{5}=\frac{9}{10}$
- Gọi $Q=x+3y=\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y-\frac{3}{2}\right)+5$

Theo bất dẳng thức Bunhiacopski :

$$\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(y-\frac{3}{2}\right)\right|\le\sqrt{(1^2+3^2)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\right]}$$

$$\le\sqrt{10\cdot\frac{9}{10}}=3$$

⇔ $\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(y-\frac{3}{2}\right)\ge -3$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x-\frac{1}{2}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{3}\\ x-\frac{1}{2}+3\left(y-\frac{3}{2}\right)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x\\ x-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{5}\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$$

⇒ x + 3y ≥ 5 − 3 = 2. Vậy $\min\limits_{(x,y)\in(H)}(x+3y)=2$

Thí dụ 26

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (Δ) : $3x - 2y - 1 = 0$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}) : (x+1)^2 + (y+2)^2 = 2.$$

a) Xác định vị trí tương đối của (Δ) và $(\mathscr{C})$.

b) Tìm trên (Δ) điểm $(x_0; y_0)$ sao cho $x_0^2 + y_0^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(ĐH Bách Khoa, 1991)

c) Tìm trên $(\mathscr{C})$ điểm $(x_1; y_1)$ sao cho $x_1^2 + y_1^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Lời giải

a) Tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$ là $I(-1; -2)$, $R = \sqrt{2}$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng (Δ) là $d = \dfrac{|3(-1) - 2(-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$

$\Leftrightarrow$ (Δ) là một đường kính của $(\mathscr{C}) \Rightarrow (\Delta)$ cắt đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) *Cách 1* : Gọi $H(x_0; y_0) \in (\Delta)$, ta có $OH^2 = x_0^2 + y_0^2$. Rõ ràng $x_0^2 + y_0^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ OH ngắn nhất $\Leftrightarrow$ H là hình chiếu của O trên (Δ)

$\Leftrightarrow H = (\Delta_1) \cap (\Delta)$ trong đó (Δ_1) là đường thẳng có phương trình $2x + 3y = 0$. Đó là đường thẳng đi qua O và vuông góc với (Δ).

Bài toán dẫn tới xác định toạ độ điểm H. Ta có toạ độ H là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x_0 = \dfrac{3}{13}; y_0 = -\dfrac{2}{13} \right)$. Đó là điểm $(x_0; y_0)$ phải tìm.

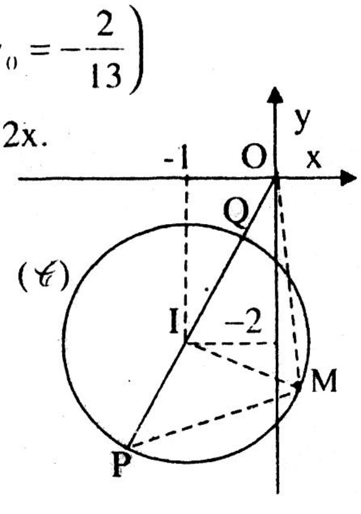
Cách 2 : Điểm $(x_0; y_0) \in (\Delta) \Leftrightarrow 3x_0 - 2y_0 - 1 = 0$

$$\Rightarrow 1 = (3x_0 - 2y_0)^2 \le [3^2 + (-2)^2](x_0^2 + y_0^2) = 13(x_0^2 + y_0^2) \Rightarrow (x_0^2 + y_0^2) \ge \frac{1}{13},$$

dấu đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{y_0}{-2} \\ 3x_0 - 2y_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -\dfrac{2x_0}{3} \\ 3x_0 - 2y_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{13} \\ y_0 = -\dfrac{2}{13} \end{cases}$

$\Rightarrow \min\limits_{(x;y) \in (\Delta)} (x_0^2 + y_0^2) = \dfrac{1}{13}$ và điểm phải tìm là $\left(x_0 = \dfrac{3}{13}; y_0 = -\dfrac{2}{13} \right)$

c) Phương trình đường kính (Δ') của $(\mathscr{C})$ đi qua O là $y = 2x$.



Hình 113

Gọi P, Q là giao của (Δ') và $(\mathscr{C})$. Toạ độ P và Q là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ (x+1)^2 + (y+2)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x+1)^2 + (2x+2)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 5(x+1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = -1 \pm \dfrac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x = -\dfrac{\sqrt{10}+5}{5} ; y = -\dfrac{2(\sqrt{10}+5)}{5}\right) \\ \left(x = \dfrac{\sqrt{10}-5}{5} ; y = \dfrac{2(\sqrt{10}-5)}{5}\right) \end{array}\right.$$

Vậy $P=\left(-\dfrac{\sqrt{10}+5}{5};-\dfrac{2(\sqrt{10}+5)}{5}\right)$, $Q=\left(\dfrac{\sqrt{10}-5}{5};\dfrac{2(\sqrt{10}-5)}{5}\right)$

Ta sẽ chứng minh P, Q là điểm thuộc $(\mathscr{C})$ theo thứ tự có $x_1^2+y_1^2$ nhỏ nhất, lớn nhất. Thật vậy :

Gọi $M(x_1; y_1)$ là một điểm thuộc $(\mathscr{C})$ ta có $OM^2=x_1^2+y_1^2$.

Rõ ràng với mọi điểm $M\in(\mathscr{C})$ luôn có $|OI - IM| \le OM \le OI + IM$

$$\Rightarrow |OI - IQ| \le OM \le OI + IP \Leftrightarrow OQ \le OM \le OP \Rightarrow \begin{cases} \min OM = OQ \\ \max OM = OP \end{cases} \text{(đpcm)}$$

Lời bình

- **P, Q theo thứ tự là các tiếp điểm của đường tròn $(\mathscr{C})$ lần lượt tiếp xúc trong, tiếp xúc ngoài với hai đường tròn đều có tâm O.**

Thí dụ 27

Tìm a để phương trình có nghiệm : $x + y + \sqrt{2x(y-1)+a} = 2$ (1)

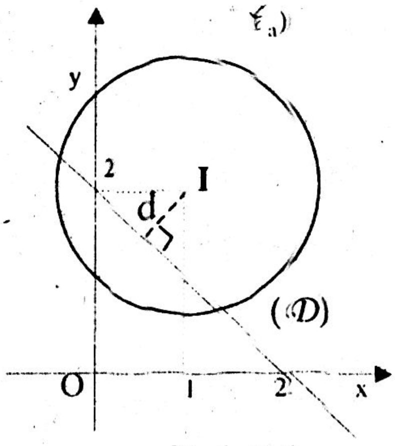
Lời giải

Viết lại (1) $\Leftrightarrow 2-x-y=\sqrt{2x(y-1)+a}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-x-y)^2 = 2x(y-1)+a \\ 2-x-y \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = 2xy - 2x + a \\ x+y-2 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = a+1 & (2) \\ x+y-2 \le 0 & (3) \end{cases}$$



Hình 114

Với $a < -1$: Phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình (1) vô nghiệm $\Rightarrow a \le -1$ không phải là giá trị phải tìm (4)

Với $a = -1$: Ta có (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ (không thoả mãn bất phương trình (3)). Vậy $a=-1$ không phải là giá trị phải tìm. (5)

Với $a > -1$: (2) là phương trình đường tròn $(\mathscr{C}_a)$: $(x-1)^2+(y-2)^2=a+1$ có tâm $I=(1, 2)$, bán kính $R=\sqrt{a+1}$.

Gọi $(\mathscr{D})$ đường thẳng có phương trình $y=x-2 \Leftrightarrow x+y-2= 0$.

Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng ($\mathcal{D}$) là $d = \frac{|1 + 2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Thấy rằng (0; 0) là một nghiệm của bất phương trình (3). Từ đó suy ra nghiệm của (3) là toạ độ các điểm thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm O (kể cả bờ) giới hạn bởi đường thẳng ($\mathcal{D}$). Kí hiệu nửa mặt phẳng ấy là $[\mathcal{D}_0]$.

Từ đó suy ra hệ (2), (3) có nghiệm $\Leftrightarrow (\mathcal{C}_a) \cap [\mathcal{D}_0] \neq \varnothing$.

Điều ấy có được khi và chỉ khi R≥d $\Leftrightarrow \sqrt{a+1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$ (6)

Từ (4), (5), (6) kết luận : Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$ (h114)

Bài toán 5. Chùm đường tròn

I. Định nghĩa

- *Chùm đường tròn* là tập hợp các đường tròn thoả mãn một trong hai điều kiện sau :
  - * cùng đi qua hai điểm cố định A và B (h. 114.1)
  - * hoặc cùng tiếp xúc với nhau tại cùng một điểm T cố định. (h. 114.2)
- Đường thẳng AB (nếu chùm đi qua A, B) hoặc là tiếp tuyến tại T (nếu các đường tròn tiếp xúc với nhau tại T) gọi là *trục* của chùm đường tròn.
- Chùm đường tròn hoàn toàn xác định khi biết
  - * hai điểm cố định A và B hoặc tiếp điểm T cố định.
  - * hoặc là một đường tròn và trục của nó
  - * hoặc là hai đường tròn của nó.
- Các đường tròn cho trước để xác định chùm đường tròn ấy được gọi *đường tròn cơ sở* của chùm.

II. Phương trình của chùm

1. Phương trình của chùm đường tròn xác định bởi

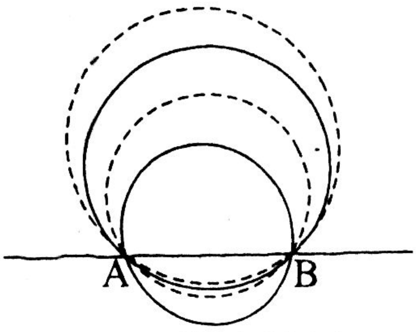
$$\begin{cases} \text{một đường tròn cơ sở } (\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \\ \text{và trục là đường thẳng } (\Delta) : mx + py + q = 0 \end{cases}$$

là $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C + \lambda(mx + py + q) = 0$

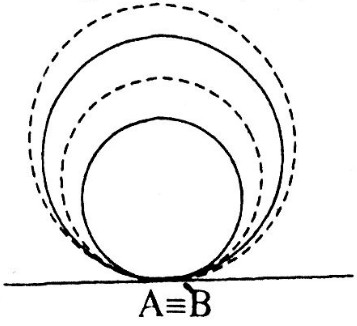
2. Phương trình của chùm đường tròn xác định bởi hai đường tròn cơ sở

$$\begin{cases} (\mathcal{C}_1) : x^2+y^2+2A_1x+2B_2y+C_1=0, \\ (\mathcal{C}_2) : x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

là $\lambda(x^2+y^2+2A_1x+2B_2y+C_1)+\mu(x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2)=0$ $(\lambda^2+\mu^2>0)$



Hình 114.1



Hình 114.2

Kỹ thuật 7.

Viết phương trình đường tròn bằng phương pháp chùm.

Thí dụ 28 (Đề 28)
Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(1; −2) và các giao điểm của đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ với đường thẳng (Δ) : $x-7y+10=0$.

Lời giải

- $(\mathscr{C})$ có tâm là I(1; −2) và bán kính là $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+20}=5$.
- Khoảng cách từ A đến đường tròn $(\mathscr{C})$ là $d=\dfrac{|1-7(-2)+10|}{\sqrt{1^2+(-7)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

Thấy rằng $d < R \Rightarrow$ Đường thẳng (Δ) cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-20=0 \\ x-7y+10=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Toạ độ giao điểm của $(\mathscr{C})$ và (Δ) là nghiệm của phương trình :

$$(x^2+y^2-2x+4y-20)+m(x-7y+10)=0 \qquad (1)$$

- Thay toạ độ điểm A vào phương trình (1) ta có

$$(1^2+(-2)^2-21+4(-2)-20)+m[1-7(-2)+10]=0$$

$\Leftrightarrow 3m-45=0 \Leftrightarrow m=15.$

Thay m = 15 vào (1) có $(x^2+y^2-2x+4y-20)+15(x-7y+10)=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+13x-101y+130=0. \qquad (2)$$

- Vậy các điểm A, giao điểm của $(\mathscr{C})$ và (Δ) đều có toạ độ thoả mãn phương trình (2) nên (2) là phương trình đường tròn cần tìm.

Chú ý

1) Phương trình (1) là phương trình chùm đường tròn có trục là đường thẳng (Δ) : $x-7y+10=0$ và $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ là đường tròn cơ sở.

2) Xét vị trí tương đối giữa (Δ) (*đường thẳng sẽ lấy làm trục*) và $(\mathscr{C})$ (*đường tròn sẽ lấy làm đường tròn cơ sở*) là điều bắt buộc của kỹ thuật viết phương trình đường tròn bằng phương pháp chùm, bởi lẽ chùm đường tròn chỉ tồn tại khi $(\Delta)\cap(\mathscr{C})\neq\varnothing$.

Thí dụ 29
Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$: $x^2+y^2-2x=0$, $(\mathscr{C}_2)$: $x^2+y^2-2y=0$.
Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ đi qua giao điểm của $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ thoả nãn mỗi một điều kiện sau đây :
1) Đi qua A(−1; 3).
2) Tiếp xúc với đường thẳng (Δ) : $2x+y+1=0$

Lời giải

1) Tâm và bán kính của $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ theo thứ tự là $I_1(1;0)$, $R_1=1$, $I_2(0;1)$, $R_2=1$. Suy ra $I_1I_2=\sqrt{2}<2=R_1+R_2 \Rightarrow (\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ cắt nhau.

Toạ độ giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Toạ độ giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ là nghiệm phương trình
$a(x^2 + y^2 - 2x) + b(x^2 + y^2 - 2y) = 0$, (với mọi $a^2 + b^2 > 0$, $a + b \neq 0$) (1)

- Thay toạ độ điểm A vào phương trình (1) ta có

$$a(-1)^2 + 3^2 + 2) + b[(-1)^2 + 3^2 - 2.3] = 0 \Leftrightarrow 3a = b \neq 0.$$

Chọn ($a = 1$, $b = 3$) thay vào (1) có $3(x^2 + y^2 - 2x) + (x^2 + y^2 - 2y) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5}y = 0 \qquad (2)$$

- Vậy các điểm A, giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$ đều có toạ độ thoả mãn phương trình (2) nên (2) là phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ cần tìm.

2) (Tiếp nối từ (1)) Biến đổi (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{2ax}{a+b} - \dfrac{2by}{a+b} = 0$ (3)

Với mọi (a, b) thoả mãn $a^2 + b^2 > 0$, $a + b \neq 0$ thì (1) là phương trình của đường tròn $(\mathcal{C}_{ab})$ đi qua các giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ có tâm $I\left(\dfrac{a}{a+b}; \dfrac{b}{a+b}\right)$ và bán kính

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a+b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a+b|}$$

Khoảng cách từ I đến đường thẳng (Δ) là $d = \dfrac{\left|\dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} + 1\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{|3a + 2b|}{\sqrt{5}\,|a+b|}$

- (Δ) là tiếp tuyến của $(\mathcal{C}_{ab}) \Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a+b|} = \dfrac{|3a + 2b|}{\sqrt{5}\,|a+b|}$

$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) = (3a + 2b)^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 12ab - b^2 = 0$ (4)

Chọn $b = -2$, ta có (4) $\Leftrightarrow a^2 - 6a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \pm \sqrt{10}$

Các giá trị ($a = 3 \pm \sqrt{10}$, $b = -2$) thích hợp với điều kiện, thay vào (3) ta có :

Với ($a = 3 + \sqrt{10}$, $b = -2$) có có $x^2 + y^2 - \dfrac{2(3 + \sqrt{10})x}{1 + \sqrt{10}} + \dfrac{4y}{1 + \sqrt{10}} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(7 + 2\sqrt{10})}{9}x - \frac{4(1 - \sqrt{10})}{9}y = 0$$

Với ($a = 3 - \sqrt{10}$, $b = -2$) có có $x^2 + y^2 - \dfrac{2(3 - \sqrt{10})x}{1 - \sqrt{10}} + \dfrac{4y}{1 - \sqrt{10}} = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2(7 - 2\sqrt{10})}{9}x - \frac{4(1 + \sqrt{10})}{9}y = 0$$

Vậy tập hợp các đường tròn $(\mathcal{C})$ phải tìm có hai cái là

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2+\frac{2(7+2\sqrt{10})}{9}x-\frac{4(1-\sqrt{10})}{9}y=0$$

$$(\mathscr{C}'): x^2+y^2-\frac{2(7-2\sqrt{10})}{9}x-\frac{4(1+\sqrt{10})}{9}y=0$$

Lời bình

1) Phương trình (1) là phương trình chùm đường tròn ($\mathscr{C}_{ab}$) với đường tròn cơ sở là ($\mathscr{C}_1$) : $x^2+y^2-2x=0$, ($\mathscr{C}_2$) : $x^2+y^2-2y=0$.

2) Xét vị trí tương đối giữa ($\mathscr{C}_1$) và ($\mathscr{C}_2$) là điều bắt buộc của kỹ thuật viết phương trình đường tròn bằng phương pháp chùm, bởi lẽ chùm đường tròn chỉ tồn tại khi $(\mathscr{C}_1)\cap(\mathscr{C}_2)\neq\varnothing$.

3) Khi a = 0, chùm ($\mathscr{C}_{ab}$) khuyết đường tròn ($\mathscr{C}_1$). Khi b=0, chùm ($\mathscr{C}_{ab}$) khuyết đường tròn ($\mathscr{C}_2$).

4) Viết phương trình đường tròn bằng phương pháp chùm là công cụ sắc bén để viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của một đường thẳng và một đường tròn hoặc qua giao điểm của hai đường tròn cho trước.

III. CÁC BÀI TOÁN PHỐI HỢP NHIỀU KỸ NĂNG

Thí dụ 30 (ĐH Thuỷ sản Nha trang, 2000)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho họ đường tròn :

$$(\mathscr{C}_m): x^2+y^2-(m-2)x+2my-1=0 \qquad (1)$$

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ($\mathscr{C}_m$) khi m thay đổi.

b) Chứng tỏ khi m thay đổi, các đường tròn ($\mathscr{C}_m$) luôn đi qua một điểm cố định.

c) Cho m = −2 và điểm A(0; −1). Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn ($\mathscr{C}_{-2}$) kẻ từ A.

Lời giải

a) Tìm tập hợp tâm các đường tròn ($\mathscr{C}_m$).

Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $c=-1<0, \forall m$ suy ra (1) là phương trình đường tròn.

Toạ độ tâm I của ($\mathscr{C}_m$) là $I\begin{cases} x_I=\dfrac{m-2}{2} \\ y_I=-m \end{cases} \Rightarrow 2x_I+y_I-2=0 \Rightarrow$ Toạ độ I thoả mãn phương trình $2x+y+2=0$ với mọi m. Vậy khi m thay đổi, quỹ tích tâm I của ($\mathscr{C}_m$) là đường thẳng $2x+y+2=0$.

b) Điểm cố định các đường tròn ($\mathscr{C}_m$).

Viết lại (1) $\Leftrightarrow (2y-x)m+x^2+y^2+2x-1=0$

Toạ độ điểm cố định của ($\mathscr{C}_m$) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2y-x=0 \\ x^2+y^2+2x-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x = -2;\ y = -1) \\ \left(x = \dfrac{2}{5};\ y = \dfrac{1}{5}\right) \end{array}\right.$. Vậy khi m thay đổi, các đường tròn

$(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $(-2; -1), \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$

c) Viết phương trình các tiếp tuyến với $(\mathscr{C}_{-2})$ kẻ từ $A(0; -1)$.

Khi m = −2 ta có $(\mathscr{C}_{-2})$: $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$.

- $(\mathscr{C}_{-2})$ có tâm $I(-2; 2)$, bán kính $R=\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1} = 3$
- Phương trình đường thẳng (Δ) qua $A(0; -1)$ có dạng $ax + b(y + 1) = 0$ (1) $(a^2 + b^2 > 0)$
- Khoảng cách từ I đến (Δ) là $d = \dfrac{|a(-2) + b(2+1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|3b - 2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- (Δ) là tiếp tuyến của $(\mathscr{C}_{-2}) \Leftrightarrow d = R \Leftrightarrow d^2 = R^2 \Leftrightarrow \dfrac{(3b - 2a)^2}{a^2 + b^2} = 9$

$\Leftrightarrow a(5a+12b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a = 0; b \neq 0) \\ 5a + 12b = 0 \end{array}\right.$, Chọn $\left[\begin{array}{l} (a = 0;\ b = 1) \\ (a = 12;\ b = -5) \end{array}\right.$, thay vào (1) :

* Với $(a=0;\ b=1)$ ta có $(1) \Leftrightarrow y+1=0 \Leftrightarrow y=1$. (2)

* Với $(5a=12;\ b-5)$ ta có $(1) \Leftrightarrow 12x-5(y+1)=0 \Leftrightarrow 12x-5y-5=0$. (3)

Từ (2), (3) kết luận : Từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới $(\mathscr{C}_{-2})$ là : $y=1$ và $12x - 5y - 5 = 0$.

Thí dụ 31 (ĐHQGTPHCM, A-2000)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình

$(\mathscr{C}_m)$: $x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2(m - 2)y + m^2 - 8m + 13 = 0$ (1)

1) Tìm các giá trị của m để $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn. Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ khi m thay đổi.

2) Cho m = 4. Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A(1; 5) đến đường tròn $(\mathscr{C}_4)$.

Lời giải

Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với $a = 1 - m$, $b = (m - 2)$, $c = m^2 - 8m + 13$.

- $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2 - c > 0 \Leftrightarrow (1 - m)^2 + (m - 2)^2 - (m^2 - 8m + 13) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 2 \end{array}\right.$

Khi đó đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ có tâm là I: $\begin{cases} x_I = 1 - m \\ y_I = m - 2 \end{cases} \Rightarrow x_I + y_I + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Toạ độ I thoả mãn phương trình $x + y + 1 = 0$. (2)

Do $\left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x_1 < -4 \\ 1 - x_1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 > 5 \\ x_1 < -1 \end{array}\right.$ (3)

Từ (2), (3) kết luận: Quỹ tích tâm đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ là phần của đường thẳng $x + y + 1 = 0$ ứng với $\left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < -1 \end{array}\right.$

Thí dụ 32 (Đề 140)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$ phụ thuộc m :

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 2m(x - a) = 0$ (với a là hằng số dương cho trước). (1)

1) Với giá trị nào của m thì $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn ?

2) Chứng tỏ rằng đoạn thẳng nối O (gốc toạ độ) với A(2a; 0) luôn cắt đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.

3) Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng là trục đẳng phương cho tất cả mọi đường tròn.

Lời giải

1) *Tìm giá trị m để $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn.*

Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$, với $A = m$, $B=0$, $C=2na$.

• $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn $\Leftrightarrow A^2 + B^2 - C > 0 \Leftrightarrow m^2 - ma > 0$

$\Leftrightarrow m(m-2a)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2a \end{array}\right.$

2) *Đoạn thẳng nối O với A(2a; 0) luôn cắt đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.*

Phương tích của các điểm O, A đối với đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ theo thứ tự là :

$\mathscr{P}_{O/(\mathscr{C}_m)} = F(0; 0) = 2ma$,

$\mathscr{P}_{A/(\mathscr{C}_m)} = F(2a; 0) = (2a)^2 + 0^2 - 2m(2a - a) = 2a(2a - m)$.

$\Rightarrow \mathscr{P}_{O/(\mathscr{C}_m)} \cdot \mathscr{P}_{A/(\mathscr{C}_m)} = 4a^2m(2a - m) < 0$ (do $a(m - 2a) > 0$)

$\Rightarrow$ Trong hai điểm O và A có một điểm nằm trong, điểm còn lại nằm ngoài đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ suy ra đoạn thẳng OA cắt đường tròn $(\mathscr{C}_m)$. (đpcm)

3) Tìm trục đẳng phương cho tất cả mọi đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là một điểm bất kì trong mặt phẳng.

Ta có $\mathscr{P}_{M/(\mathscr{C}_m)} = x_0^2 + y_0^2 - 2m(x_0 - a)$. Rõ ràng $\mathscr{P}_{M/(\mathscr{C}_m)}$ không phụ thuộc m

$\Leftrightarrow x_0 - a = 0 \Leftrightarrow x_0 = a$. Suy ra mọi điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng $x = a$ đều có cùng phương tích bằng $x_0^2 + y_0^2$ đối với mọi đường tròn $(\mathscr{C}_m)$.

Nói khác đi đường thẳng $x=a$ là trục đẳng phương của họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$. (đpcn)

Thí dụ 33 (Đề 27)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đềcác vuông góc, cho ba điểm A(0; a), B(b; 0), C(– b; 0) với a > 0, b > 0.

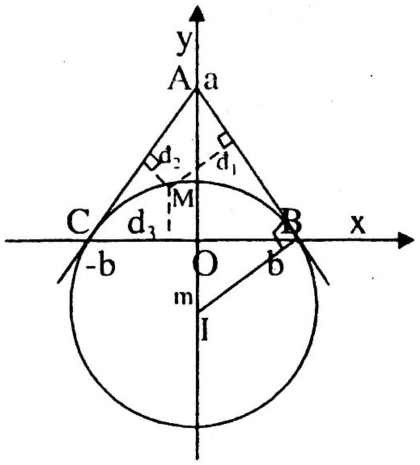
1) Viết phương trình đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với đường thẳng AB tại B và tiếp xúc với đường thẳng AC tại C.

2) M là một điểm bất kì nằm trên đường tròn ($\mathscr{C}$). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ tới các đường thẳng AB, AC, BC.

Chứng minh : $d_1.d_2 = d_3^2$.

Lời giải

1) *Phương trình đường tròn* ($\mathscr{C}$) .



Hình 115

có $\begin{cases} OB = OB = b \\ AB = AC = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A

$\Rightarrow$ OA vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác của góc A $\Rightarrow$ Tâm của ($\mathscr{C}$) thuộc Oy.

Gọi tâm và bán kính của ($\mathscr{C}$) theo thứ tự là I(0; m), R. Ta có $\overrightarrow{IB} = (b; -m)$, $\overrightarrow{AB} = (b; -a)$

- ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với AB tại AB $\Leftrightarrow$ IB$\perp$AB

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow b^2 = ma \Leftrightarrow m = -\dfrac{b^2}{a}$

Trong tam giác AOB vuông tại O ta có $IB^2 = OI^2 + OB^2$ hay $R^2 = m^2 + b^2$

$\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{b^4}{a^2} + b^2$

- Cuối cùng phương trình của ($\mathscr{C}$) là $x^2 + \left(y + \dfrac{b^2}{a}\right)^2 = \dfrac{b^4}{a^2} + b^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + 2ab^2y - a^2b^2 = 0$

2) *Chứng minh* : $d_1.d_2 = d_3^2$.

Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax + by - ab = 0$

Phương trình đường thẳng AC là $\dfrac{x}{-b} + \dfrac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow ax - by + ab = 0$

Ta có $d_1 = \dfrac{|ax_0 + by_0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $d_2 = \dfrac{|ax_0 - by_0 + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $d_3 = |y_0|$

$\Rightarrow d_1.d_2 = \dfrac{|ax_0 + (by_0 - ab)|.|ax_0 - (by_0 - ab)|}{a^2 + b^2}$

$= \dfrac{|a^2x_0^2 - (by_0 - ab)^2|}{a^2 + b^2} = \dfrac{|a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2|}{a^2 + b^2}$

$$=\frac{|(a^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)-(a^2+b^2)y_0^2|}{a^2+b^2} \qquad (1)$$

Do $M\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow\ a^2x_0^2+a^2y_0^2+2ab^2y_0-a^2b^2=0$

nên (1) $\Leftrightarrow d_1.d_2=\dfrac{(a^2+b^2)y_0^2}{a^2+b^2}=y_0^2=d_3^2$. Vậy $d_1.d_2=d_3^2$ (dpcm).

BÀI TẬP

Bài 1 (ĐH Hàng hải, 2000)

Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

a) Xác định tâm và bán kính của đường tròn $(\mathscr{C})$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ xuất phát từ A.

Bài 2 (ĐHDL Hùng Vương, D-2001).

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Đề các vuông góc cho điểm $A(8; -1)$ và đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ (1)

1) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ kẻ từ điểm A.

2) Gọi F, F là các tiếp điểm của các tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ nói ở câu 1.

Viết phương trình đường thẳng nối E và F.

3) Tính độ dài đoạn thẳng EF.

Bài 3. Viết phương trình đường tròn đi qua gốc toạ độ và tiếp xúc với hai đường thẳng $(\Delta_1) : 2x + y - 1 = 0$ và $(\Delta_1) : 2x - y + 2 = 0$.

Bài 4. Tam giác ABC có ba cạnh lần lượt đặt trên ba đường thẳng $3x - 4y - 35 = 0$, $x - 1 = 0$, $3x + 4y - 35 = 0$. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ấy.

Bài 5. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn có tâm $I(2; 1)$ tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta) : 5x - 12y + 15 = 0$. Đường thẳng $(\Delta') : 4x + 3y - 8 = 0$ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm AB. Tính diện tích tam giác IAB.

Bài 6. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn có đường kính AB với $A(-1; 0)$, $B(5; 0)$.

Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ trong mỗi trường hợp sau :

1) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(\Delta_1) : x+y-1=0$.

2) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta_2) : 12x+5y-50=0$.

3) Tiếp tuyến tạo một góc 45^0 với đường thẳng $(\Delta_2) : 2x+y-2=0$.

Bài 7. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2+y^2=25$.

1) Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ kẻ từ điểm $A(1; 7)$. Gọi E, F là các tiếp điểm.

2) Tính các góc của tam giác AEF.

Bài 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(0; 5)$, $B(12; 0)$, $I(2; 2)$.

1) Chứng tỏ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

2) Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ qua trung điểm các cạnh của tam giác OAB.

3) Chứng tỏ hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và (OAB) tiếp xúc với nhau. Xác định toạ độ tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 9. Cho hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) có phương trình

$$(\mathscr{C}_1): x^2+y^2-2x+2y-2=0,\ (\mathscr{C}_2): x^2+y^2-6y=0$$

1) Chứng minh hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) cắt nhau.

2) Viết phương trình đường tròn đồng thời đi qua điểm M(1; 1) và các giao điểm của ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$).

3) Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) đồng thời tiếp xúc với đường thẳng (Δ) : $x + y + 1 = 0$.

Bài 10. Cho hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) có phương trình

$$(\mathscr{C}_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0,\ (\mathscr{C}_2): x^2+y^2+2x-2y-14=0.$$

1) Chứng minh hai đường tròn ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) cắt nhau.

2) Viết phương trình đường tròn đồng thời đi qua điểm M(0; 1) và các giao điểm của ($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$).

3) Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của($\mathscr{C}_1$) và $\mathscr{C}_2$) đồng thời tiếp xúc với đường thẳng (Δ) : $y = x$.

§2 ĐƯỜNG E LIP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$).

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1+MF_2=2a$ trong đó a là một số không đổi lớn hơn c.

- Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các *tiêu điểm* của elip.
- Khoảng cách 2c giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự* của elip.

Nếu điểm M nằm trên elip thì các khoảng cách MF_1 và MF_2 gọi là các bán *kính qua tiêu điểm* của điểm M.

- Trung điểm I của đoạn thẳng F_1F_2 gọi là *tâm* của elip.

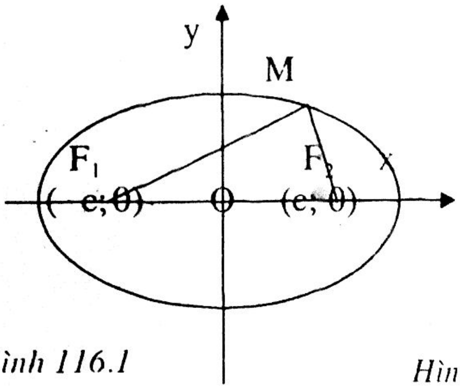
2. Phương trình chính tắc của đường elip

Xét elip gồm những điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó $F_1F_2 = 2c$.

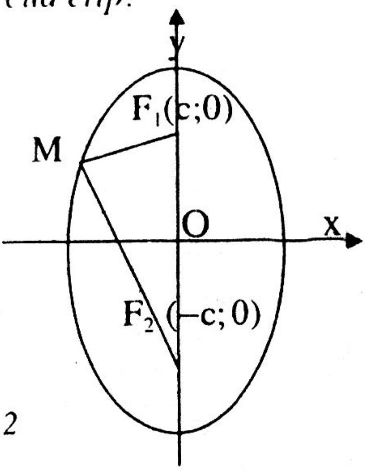
Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho các tiêu điểm có toạ độ $F_1=(-c;\ 0)$, $F_2=(-c;\ 0)$. (h. 116.1). Khi đó elip có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{với } b^2=a^2-c^2} \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là phương trình chính tắc của elip.



Hình 116.1



Hình 116.2

Chú ý :

1) Trong phương trình chính tắc : a>b>0, tiêu điểm thuộc trục hoành.

2) Công thức bán kính qua tiêu điểm :

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = a + ex,\quad MF_2 = a - \frac{cx}{a} = a - ex$$

(Không vuông góc với trục tung, nhưng bán kính qua tiêu điểm biểu diễn được qua một biến duy nhất là x).

3) (h. 116.1) Cũng là elip trên, nhưng nếu chọn hệ trục toạ độ sao cho các tiêu điểm có toạ độ $F_1=(0; -c)$, $F_2 = (0; c)$, khi đó elip có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ với } b^2 = a^2 - c^2} \quad (2)$$

Trong trường hợp này tiêu điểm thuộc trục tung và phương trình (2) *không được gọi* là phương trình chính tắc của elip.

3. Hình dạng của elip

a) Tính đối xứng

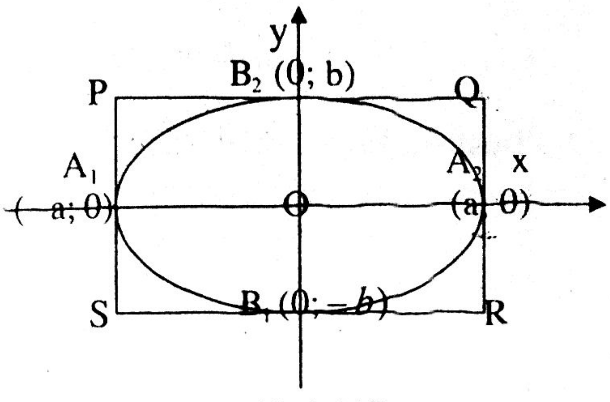
Xét các phương trình (1) và (2). Đó là các phương trình chẵn đối với x và y nên elip có trục đối xứng là các đường thẳng Ox và Oy, và do đó nó nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

b) Hình chữ nhật cơ sở

Xét elip có phương trình chính tắc (1).

Rõ ràng elip cắt trục Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$, cắt trục Oy tại hai điểm $B_1(0; -b)$ và $B_2(0; b)$. Bốn điểm ấy được gọi là bốn đỉnh của elip. Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là *trục lớn*, đoạn thẳng B_1B_2 gọi là *trục bé* của elip.

Rõ ràng $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2c$.



Hình 117

Vẽ các đường thẳng y= ±a, y = ±b. Bốn đường thẳng đó tạo thành một hình chữ nhật PQRS. Ta gọi đó là hình *chữ nhật cơ sở* của elip.

Chú ý :

* Từ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \left\{\frac{x^2}{a^2}\leq 1 \text{ và } \frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\} \Rightarrow \begin{cases} -a\leq x\leq a \\ -b\leq x\leq b \end{cases}$

Bởi vậy mọi điểm của elip đều thuộc miền chữ nhật cơ sở của nó.

* Tiêu điểm của elip nằm trên trục lớn.

c) Tâm sai của elip

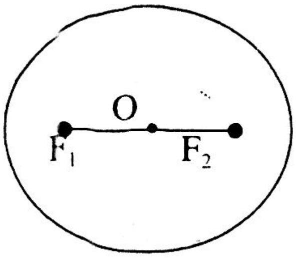
- Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn gọi là *tâm sai* của elip và ký hiệu là e.

Vậy $e=\frac{c}{a}$.

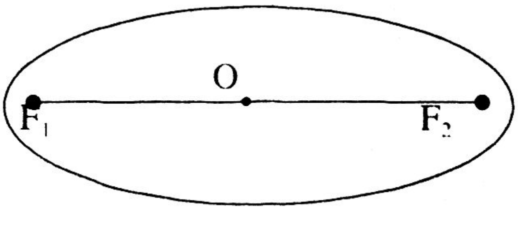
Rõ ràng $0 < e < 1$. Do $c^2 = a^2 - b^2$ và a không đổi suy ra :

+) Nếu e càng bé (càng gần tới 0) thì b càng gần a, hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó hình elip càng "béo"(càng gần với hình tròn) (h. 118.1).

+) Nếu e càng lớn (càng gần tới 1) thì b càng gần tới 0, hình chữ nhật cơ sở càng "dẹt", do đó hình elip càng "gầy" (càng "dẹt").(h. 118.2)



Hình 118.1



Hình 118.2

4. Đường chuẩn của elip

1. Định nghĩa

Cho elip có phương trình chính tắc

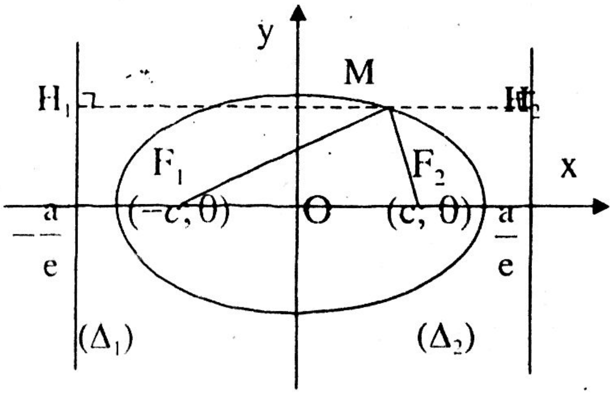
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Các đường thẳng $(\Delta_1) : x=-\frac{a}{e}$,

$(\Delta_2) : x=\frac{a}{e}$ được gọi là các đường chuẩn của elip.

(Δ_1) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

(Δ_2) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2. (h. 119)



Hình 119

2. Định lý

Tỉ số giữa khoảng cách từ một điểm bất kì trên elip đến một tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai của elip.

$$\frac{MF_i}{d(M,(\Delta_i))}=e\ ,\ \ (i = 1; 2)$$

Để ý $\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}>\frac{a^2}{a}=a$ tức là $\frac{a}{e}>a$ và $-\frac{a}{e}<a \Rightarrow$ Các đường chuẩn không cắt elip.

II. CÁC BÀI TOÁN VÀ THÍ DỤ

Bài toán 1. Xác định các yếu tố của elip

Thí dụ 1

Cho các đường cong :

$$(\mathscr{C}_1) : x^2 + 25y^2 = 25,\ (\mathscr{C}_2) : 49x^2 + 64y^2 = 1,\ (\mathscr{C}_3) : 9x^2 + 4y^2 = 1.$$

Đặt tên cho các đường cong nói trên. Nếu là elip hãy xác định trục lớn, trục bé và toạ độ tiêu điểm của nó.

Lời giải

a) Xét đường cong $(\mathscr{C}_1) : x^2 + 25y^2 = 25.$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + y^2 = 1$. Đó là phương trình có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với a = 5, b = 1 $\Rightarrow$ $(\mathscr{C}_1)$ là đường elip

- Trục lớn : 2a=10, trục bé : 2b=2.
- Tiêu điểm $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 1} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm là $F_1(-2\sqrt{6};0), F_2(2\sqrt{6};0)$.

b) Xét đường cong $(\mathscr{C}_2) : 49x^2 + 64y^2 = 1.$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{49}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{64}} = 1$. Đó là phương trình có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với $a = \dfrac{1}{7}, b = \dfrac{1}{8}$ $\Rightarrow$ $(\mathscr{C}_2)$ là đường elip

- Trục lớn : $2a = \dfrac{2}{7}$, trục bé : $2b = \dfrac{1}{4}$.
- Tiêu điểm $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{1}{49} - \dfrac{1}{64}} = \sqrt{\dfrac{15}{49.64}} = \dfrac{\sqrt{15}}{56}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm là $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{56};\ 0\right)0), F_2\left(\dfrac{\sqrt{15}}{56};\ 0\right)$

c) Xét đường cong $(\mathscr{C}_3) : 9x^2 + 4y^2 = 1$ (3)

- Ta có (3) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$. Đó là phương trình có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{1}{2}, 0 < a < b \Rightarrow (\mathscr{C}_3)$ là đường elip.

- Trục bé : $2a = \dfrac{2}{3}$, trục lớn : 2b = 1.

- Tiêu điểm $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm là $F_1\left(0;-\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$, $F_2\left(0;\frac{\sqrt{5}}{6}\right)$

Thí dụ 2

Cho các đường cong $(\mathscr{E}_1): 4x^2+9y^2=36$, $(\mathscr{E}_2): (2-\sqrt{3})x^2+y^2=2+\sqrt{3}$.

Đặt tên cho các đường cong nói trên. Tìm tâm sai và viết phương trình các đường chuẩn nếu nó là elip.

Lời giải

a) Xét đường cong $(\mathscr{E}_1): 4x^2+9y^2=36$ (1)

Chia hai vế cho 36 ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Đó là phương trình có dạng

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a=3$, $b=2 \Rightarrow (\mathscr{E}_1)$ là đường elip.

- Do $a>b \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Tâm sai : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- Phương trình các đường chuẩn là : $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$

b) Xét đường cong $(\mathscr{E}_2): (2-\sqrt{3})x^2+y^2=2+\sqrt{3}$ (2)

Nhân hai vế với $2+\sqrt{3}$ ta có (1) $\Leftrightarrow x^2+(2+\sqrt{3})y^2=1 \Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{2-\sqrt{3}}=1$.

Đó là phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $a=1$, $b=2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow (\mathscr{E}_2)$ là đường elip .

- Do $a>b \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1^2-(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4\sqrt{3}-6}$
- Tâm sai : $e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{3}-6}{1}=4\sqrt{3}-6$

Phương trình đường chuẩn là $x=\pm\frac{a}{e}=\frac{1}{4\sqrt{3}-6}=\frac{2+\sqrt{3}}{6}$

Thí dụ 3

Cho điểm $M\left(2;\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ và elip $(\mathscr{E}): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ (1)

a) Tính các bán kính qua các tiêu điểm của elip kẻ từ M.

b) Một đường thẳng song song với Oy đi qua tiêu điểm của elip cắt elip tại hai điểm A và B, tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

a) *Tính các bán kính qua các tiêu điểm.*

Phương trình (1) có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a=\sqrt{5} \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$\Rightarrow \sqrt{5-4}=1$, $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

- Thay toạ độ điểm M vào phương trình (1) ta có $\frac{2^2}{5}+\frac{2^2}{4.5}=1$ là đẳng thức đúng

⇒ M là một điểm nằm trên elip (ℰ). Áp dụng công thức bán kính qua tiêu điểm ta có:

$MF_1=a+\frac{c}{a}x_M=\sqrt{5}+\sqrt{5}.\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}+2$,

$MF_2=a-ex_M=\sqrt{5}-\sqrt{5}.\frac{2\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}-2$.

Tóm lại : $MF_1=\sqrt{5}+2$ (đvđd), $MF_2=\sqrt{5}-2$ (đvdd)

b) *Tính độ dài đoạn thẳng AB*

Giả sử AB//Oy là dây cung qua $F_1(-1;0)$ của elip. Rõ ràng $x_A=x_F=-1$.

Ta có $AB=2AF_1=2[\sqrt{5}-\sqrt{5}.(-1)]=4\sqrt{5}$. Vậy $AB=4\sqrt{5}$ (đvđd)

Thí dụ 5

Tìm trên elip (ℰ) : $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$ các điểm M trong mỗi trường hợp sau :

a) Nhìn hai tiêu điểm của nó dưới một góc vuông.

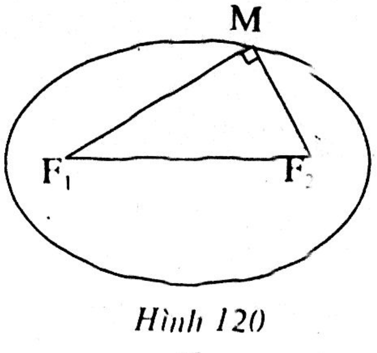
b) $2MF_1=MF_2$ trong đó F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip.

Lời giải

Phương trình của (ℰ) có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ với $\begin{cases} a=\sqrt{5} \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$

$\Rightarrow \sqrt{5-1}=2$, $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là một điểm trên elip (ℰ).

Ta có $MF_1=a+ex_0$, $MF_2=a-ex_0$.



Hình 120

a) Điểm M nhìn các tiêu điểm của elip dưới một góc vuông $\Leftrightarrow MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow MF_1^2+MF_2^2=(F_1F_2)^2$

$\Leftrightarrow (a+ex_0)^2+(a-ex_0)^2=(2c)^2 \Leftrightarrow a^2+(ex_0)^2=2c^2$

$\Leftrightarrow 5+\left(\frac{2x_0}{\sqrt{5}}\right)^2=2.2^2 \Leftrightarrow x_0^2=\frac{15}{4} \Leftrightarrow x_0=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

Thay vào phương trình của (ℰ) có $\frac{15}{5.4}+y_0^2=1 \Leftrightarrow y_0^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy trên (ℰ) có bốn điểm M cùng nhìn hai tiêu điểm của nó dưới một góc vuông là :

$$M_1\left(\frac{\sqrt{15}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ M_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ M_3\left(-\frac{\sqrt{15}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ M_4\left(-\frac{\sqrt{15}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

b) $2MF_1 = MF_2 \Leftrightarrow 2(a + ex_0) = a - ex_0 \Leftrightarrow 3ex_0 = -a$

$\Leftrightarrow\ x_0 = -\frac{a}{3e} = -\frac{a^2}{3c} = -\frac{5}{6}$. Thay vào phương trình của $(\mathscr{E})$ có $\frac{5^2}{5.36} + y_0^2 = 1$

$\Leftrightarrow y_0^2 = \frac{31}{36} \ \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{31}}{6}$

Vậy trên $(\mathscr{E})$ có hai điểm M thoả mãn $2MF_1 = MF_2$ là

$$M_1\left(-\frac{5}{6};-\frac{\sqrt{31}}{6}\right),\ M_2\left(-\frac{5}{6};\frac{\sqrt{31}}{6}\right).$$

Thí dụ 6

Tìm tâm sai của elip trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Mỗi tiêu điểm nhìn trục nhỏ dưới một góc α.

b) Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng k lần tiêu cự ($k > \frac{1}{2}$).

c) Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng k lần tiêu cự.

Lời giải

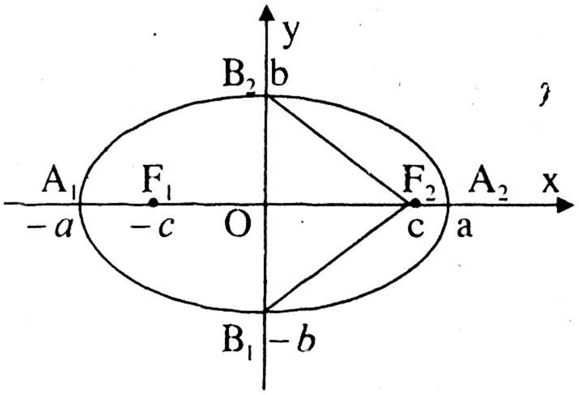
a) Theo giả thiết $\text{tg}\alpha = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow 1 + \text{tg}^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{b^2 + c^2}{c^2}$

$\overset{b^2+c^2=a^2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{a^2}{c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos\alpha$ hay $e = \cos\alpha$



Hình 121

b) Trong tam giác A_2OB_2 vuông tại O ta có $(A_2B_2)^2 = OA_2^2 + B_2^2 = a^2 + b^2$.

Theo giả thiết ta có $A_2B_2 = k\,F_1F_2 \Leftrightarrow (A_2B_2)^2 = (k2c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4k^2c^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4k^2c^2 \Leftrightarrow a^2 + (a^2 - c^2) = 4k^2c^2 \Leftrightarrow 2a^2 = (4k^2 + 1)c^2$

$\Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{4k^2 + 1} \quad \Leftrightarrow e = \sqrt{\frac{2}{4k^2 + 1}}$

c) Phương trình các đường chuẩn là $x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow$ Khoảng cách giữa chúng là $d = \frac{2a}{e}$.

Theo giả thiết $d = k\,A_2B_2 \Leftrightarrow \frac{2a}{e} = k2c \Leftrightarrow \frac{1}{k} = \frac{c}{a}\cdot e \Leftrightarrow e^2 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow e = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Bài toán 2. Viết phương trình của elip

Thí dụ 7.

Viết *phương trình chính tắc* của elip $(\mathscr{E})$ biết rằng $(\mathscr{E})$ có :

a) Độ dài trục lớn bằng 6, tiêu cự bằng 4.

b) Một tiêu điểm $F_1(-2; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 10.

c) Một tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên $(\mathscr{E})$.

d) Đi qua hai điểm $M(1; 0)$ và $N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$.

e) Tiêu cự bằng 8, tâm sai bằng $\frac{4}{5}$ và tiêu điểm thuộc trục hoành. (Đề 100)).

Lời giải

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (với $b^2=a^2-c^2$) ((1)

a) Theo giả thiết $\begin{cases}2a=6\\2c=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\c=2\end{cases} \Rightarrow a^2-c^2=5$ hay $b^2=5$

Thay vào (1) có $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

Đó là *phương trình chính tắc* của elip cần tìm.

b) Theo giả thiết $\begin{cases}F_1(-2;\ 0)\\2a=10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=-2\\a=5\end{cases} \Rightarrow a^2-c^2=25-4=21$ hay $b^2=21$

Thay vào (1) có $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

Đó là *phương trình chính tắc* của elip cần tìm.

c) Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow \begin{cases}c=\sqrt{3}\\b^2=a^2-c^2\end{cases} \Rightarrow b^2=a^2-3 \Leftrightarrow a^2=b^2+3$ (2)

- Điểm $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên $(\mathscr{E}) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$ (3)

Thay (2) vào (3) ta có : $\frac{1}{b^2+3}+\frac{3}{4b^2}=1 \Leftrightarrow 4b^2+3(b^2+3)=4b^2(b^2+3)$

$\Leftrightarrow 4(b^2)^2+5b^2-9=0 \overset{b^2>0}{\Leftrightarrow} b^2=1$. Thay vào (2) có $a^2=4$.

Với ($a^2=4$, $b^2=1$) thay vào (1) có $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

Đó là *phương trình chính tắc* của elip cần tìm.

d) $M(1; 0)$ và $N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$ thuộc elip $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a < b \Rightarrow$ Không có *phương trình chính tắc* của elip trong hệ toạ độ đã cho.

e) Theo giả thiết $\begin{cases} 2c = 8 \\ e = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = 9 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ a = 5 \end{cases}$

Thay vào (1) có $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Đó là *phương trình chính tắc* của elip cần tìm.

Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của elip.

Thí dụ 8

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đề các vuông góc, cho elip $(\mathcal{E})$ có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

1) Chứng minh với mọi điểm $M \in (\mathcal{E})$ ta đều có $b \leq OM \leq a$. (Đề 119)

2) Gọi F_1 là tiêu điểm có toạ độ$(-c; 0)$. Tìm điểm $M \in (\mathcal{E})$ sao cho MF_1 ngắn nhất, dài nhất. (Học viện Bưu chính Viễn thông, 1999)

3) Gọi A là một giao điểm của đường thẳng $(\Delta) : y = kx$ với $(\mathcal{E})$. Tính OA theo a, b và k. (Đề 119)

4) Gọi A, B là hai điểm thuộc $(\mathcal{E})$ sao cho $OA \perp OB$. Chứng minh

$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ có giá trị không đổi. (Đề 119)

5) Gọi $(\mathcal{D})$ là đường thẳng AB nói ở câu 3, H là hình chiếu của O trên $(\mathcal{D})$. Chứng minh $(\mathcal{D})$ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

6) Gọi A', B' theo thứ tự là điểm đối xứng qua O lần lượt của A, B.

Tìm tứ giác ABB'A' có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. (Nội dung đề thi ĐH Xây dựng, 1996)

Lời giải

1) Với mọi điểm $M(x; y)$ ta có $OM^2 = x^2 + y^2$

Do $a > b \Rightarrow \frac{t^2}{a^2} \leq \frac{t^2}{b^2}$.

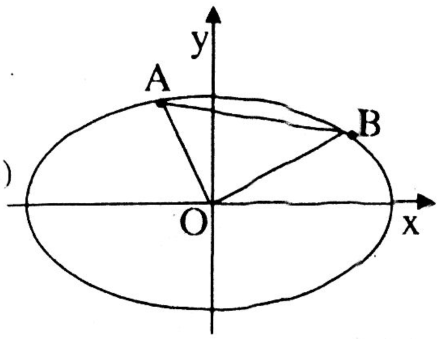
$M \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có $\frac{OM^2}{a^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}$.

Do (1) $\Rightarrow \frac{OM^2}{a^2}\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow OM\le a$ (đpcm)

Tương tự $\frac{OM^2}{b^2}=\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\Leftrightarrow OM\ge b$ (đpcm) (h. 122)



Hình 122

2) Theo công thức bán kính qua tiêu điểm ta có $MF_1= a + ex$.

Mặt khác $M\in(\mathcal{E}) \Rightarrow -a\le x\le a \Rightarrow a+e(-a)\le MF_1\le a+ea$

$\Leftrightarrow a-c\le MF_1\le a+c$. Vậy :

- Giá trị bé nhất của MF_1 là $MF_1 = a-c$ đạt được khi $M\equiv A_1(-c;\,0)$
- Giá trị lớn nhất của MF_1 là $MF_1 = a-c$ đạt được khi $M\equiv A_2(c;\,0)$

3) Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 & (1)\\ y=kx & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta có $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\right)=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{a^2b^2}{b^2+k^2a^2}$ (3)

Từ (2)$\Rightarrow x^2+y^2=(1+k^2)x^2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+k^2a^2}$ (4)

hay $OA=\frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}$ (5)

4) Từ (5) $\Rightarrow \frac{1}{OA^2}=\frac{b^2+k^2a^2}{a^2b^2(1+k^2)}$. (6)

- $OB\perp OA \Leftrightarrow$ B thuộc đường thẳng $(\Delta')\perp(\Delta)$ suy ra phương trình đường thẳng (Δ') qua O, B là $x = ky$.

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=ky\end{cases}$

Tương tự như đối với A ta có $\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+k^2b^2}{a^2b^2(1+k^2)}$ (7)

Từ (6), (7) suy ra

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{b^2+k^2a^2}{a^2b^2(1+k^2)}+\frac{a^2+k^2b^2}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{(a^2+b^2)(1+k^2)}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

Tóm lại $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ (const) (đpcm) (8)

5) Trong tam giác AOB vuông tại O, OH là đường cao ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \Leftrightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{(const)}$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng ($\mathcal{D}$) luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O, bán kính

$$R=OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \text{ (đpcm)}$$

6) Rõ ràng tứ giác ABB'A' là hình thoi và có diện tích S=2OA.OB.

6.1) Diện tích nhỏ nhất

Áp dụng bất đẳng thức Côsi vào (8) ta có

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}\ge\frac{2}{OA.OB}=\frac{4}{S}\Rightarrow S\ge\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow b^2+ka^2=a^2+kb^2$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(k^2-1)=0 \Leftrightarrow k^2-1=0 \Leftrightarrow k=\pm1 \Leftrightarrow$ A, B lần lượt thuộc các đường phân giác $y=\pm x$ của góc hợp bởi các trục toạ độ.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tứ giác ABB'A' là $S=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ (đvdt)

6.2) Diện tích lớn nhất

Từ (6), (7) suy ra $\frac{1}{OA}\cdot\frac{1}{OB}=\frac{\sqrt{b^2+k^2a^2}}{ab\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+k^2b^2}}{ab\sqrt{1+k^2}}$

hay $\frac{2}{S}\ge\frac{\sqrt{(b^2+k^2a^2)(a^2+k^2b^2)}}{a^2b^2(1+k^2)}$ (9)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski

$$\sqrt{(b^2+k^2a^2)(a^2+k^2b^2)}\ge ba+|k|a.|k|b=ab(1+k^2)$$

Suy ra $\frac{2}{S}\ge\frac{ab(1+k^2)}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{1}{ab} \Rightarrow S\le 2ab$

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\frac{|k|a}{b}=\frac{|k|b}{a} \Leftrightarrow |k|(a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow k=0$

$\Leftrightarrow$ A, B, B', A' là bốn đỉnh của elip.

Vậy giá trị lớn nhất của tứ giác ABB'A' là S = 2ab (đvdt)

Bài toán 4. Tập hợp điểm với elip

Thí dụ 9

Cho đường tròn (O') nằm trong đường tròn (O). Tìm quỹ tích tâm I của các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn đã cho.

Lời giải

Gọi bán kính các đường tròn (O), (O'), (I) lần lượt là R, R' và r.

Do (O') nằm trong (O) nên (I) tiếp xúc với cả hai đường tròn (O) và (O')

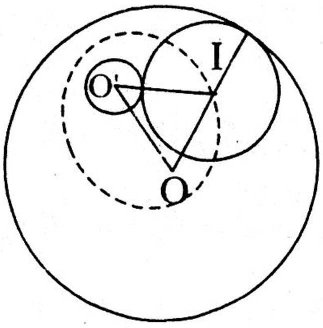
$\Leftrightarrow$ (I) tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài với (O') $\Leftrightarrow \begin{cases} IO = R - r \\ IO' = R + r \end{cases}$

$\Rightarrow IO + IO' = R + R' \qquad (1)$

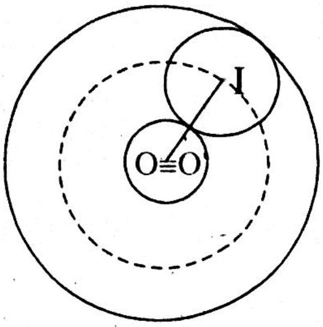
Trường hợp 1 : $O \neq O'$ (h. 123.1)

Từ (1) suy ra tập hợp I là elip có các tiêu điểm là O và O', độ dài trục lớn là:

$$2a = R + R'$$



Hình 123.1



Hình 123.2

Trường hợp 2 : $O \equiv O'$ (h. 123.2)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2IO = R + R' \Leftrightarrow IO = \dfrac{R + R'}{2}$ $\Rightarrow$ Tập hợp tâm I là đường tròn tâm O, bán kính $\dfrac{R + R'}{2}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ (I) tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài với (O')

$\Rightarrow$ Tập hợp tâm I là đường tròn tâm O, bán kính $\dfrac{R + R'}{2}$.

Thí dụ 10

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho hai đường tròn đồng tâm O, bán kính lần lượt là $R_1 = a$, $R_2 = b$. Tia Ot cắt hai đường tròn theo thứ tự ở E, F. Qua F kẻ đường thẳng (Δ) song song với trục Ox. Qua E kẻ đường thẳng (Δ') song song với trục Oy. Gọi M là giao điểm của (Δ) và (Δ''). Tìm quỹ tích M khi Ot quay quanh O.

Lời giải

Xét bài toán trong hai trường hợp của tia Ot sau đây :

Trường hợp 1 (h. 124):

Tia Ot thuộc nửa mặt phẳng có bờ là trục Ox, chứa tia Oy.

Gọi $K = (\Delta) \cap Oy$, $H = (\Delta') \cap Ox$, $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M, $\angle xOt = \alpha$ với $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$.

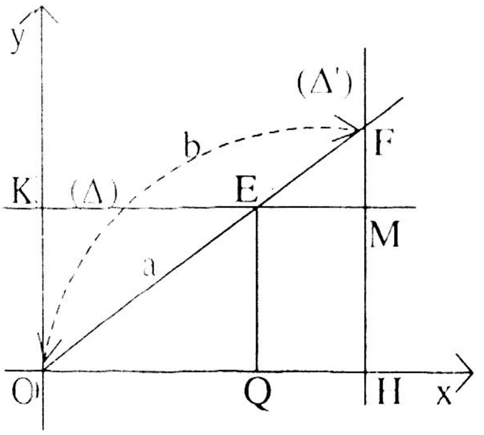
Từ giả thiết suy ra OF=a, OE=b và $\begin{cases} x_0 = \overline{OH} = OF\cos\alpha = a\cos\alpha \\ y_0 = \overline{OK} = OE\sin\alpha = b\sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2} = \cos^2\alpha \\ \dfrac{y_0^2}{b^2} = \sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

⇔ Tập hợp các điểm M là nửa elip

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $y \geq 0$.



Hình 124

Trường hợp 2 :

Tia Ot thuộc nửa mặt phẳng có bờ là trục Ox, chứa tia đối của tia Oy

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua Ox. Khi đó M' có toạ độ $(x_0; -y_0)$

Tương tự trên suy ra $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{(-y_0)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

⇔ Tập hợp các điểm M là nửa elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $y < 0$.

Từ hai trường hợp trên kết luận : Tập hợp các điểm M phải tìm là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Thí dụ 11

Cho hai đường tròn $(\mathscr{C}_1) : x^2 + y^2 = 1$ và $(\mathscr{C}_2) : x^2 + y^2 = 49$. Gọi A, B là các điểm theo thứ tự thuộc $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ và I là trung điểm AB. Viết phương trình đường cong do I tạo thành khi A, B thay đổi trên $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ sao cho Ox luôn là phân giác của góc $\angle AOB$.

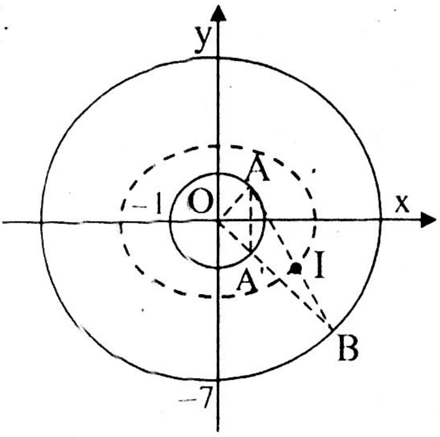
Lời giải

Gọi R_1, R_2 theo thứ tự là bán kính của hai đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ và $(\mathscr{C}_2)$ có tâm tại O. Rõ ràng $R_1 = 1$, $R_2 = 7$.

Gọi $A' = OA \cap (\mathscr{C}_1) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \dfrac{R_2}{R_1}\overrightarrow{OA'} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = 7\overrightarrow{OA'}$.

Do Ox là phân giác của góc $\angle AOB \Rightarrow$ A' và A là hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox. Do vậy gọi toạ độ của A là $(x_0; y_0)$ ta có $A'(x_0; -y_0)$, $B(7x_0; -7y_0)$.

- I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$



Hình 125

hay $\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_0 - 7x_0}{2} \\ y_1 = \dfrac{y_0 - 7y_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_0 \\ y_1 = -3y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{16} = x_0^2 \\ \dfrac{y_1^2}{9} = y_0^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{9} = x_0^2 + y_0^2$ (1)

- $B \in (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{x_1^2}{16} + \dfrac{y_1^2}{9} = 1 \Leftrightarrow$ I thuộc elip có phương trình $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Thí dụ 12 **(ĐH Nông nghiệp I, 1996)**

Cho đường cong $(\mathscr{E})$ có phương trình $9x^2 + 25y^2 = 225$ (1)

a) Đặt tên cho $(\mathscr{E})$. Nếu là elip hãy cho biết tiêu điểm, tâm sai của nó. Vẽ elip dựa trên hình chữ nhật cơ sở.

b) Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $I(1;\ 1)$ và cắt elip tại hai điểm E, F sao cho I là trung điểm của EF.

c) Cho điểm $A(-5;\ 0)$. Gọi M là một điểm thuộc $(\mathscr{E})$, H là hình chiếu vuông góc của M trên trục Oy. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh khi M thay đổi trên $(\mathscr{E})$ thì, P di chuyển trên đường cong cố định.

Lời giải

1) Viết lại (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Đó là phương trình có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a = 5$, $b = 3 \Rightarrow (\mathscr{C})$ là đường elip.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow$ Tiêu điểm $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

b) Để ý $I \notin Ox \Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ không cắt elip $(\mathscr{E})$ tại hai điểm thoả mãn yêu cầu bài toán. (1)

Xét đường thẳng (Δ) qua $I(1;\ 1)$ có phương trình $y = k(x - 1) + 1$. (2)

Toạ độ các giao điểm E, F của (Δ) và $(\mathscr{E})$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 = 225 & (3) \\ y = kx + 1 - k & (4) \end{cases}$$

Thế (3) vào (2) ta có $9x^2 + 25(kx + 1 - k)^2\ (kx + 1 - k)^2 = 225$

$\Leftrightarrow (9 + 25k^2)x^2 - 50k(k - 1)x + 25(k^2 - 2k - 8) = 0$ (5)

Để ý, thay toạ độ I vào vế trái phương trình (1) có $34 < 225 \Rightarrow$ I nằm trong đường elip $\Rightarrow (\Delta)$ luôn cắt $(\mathscr{E})$ tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Với mọi k phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}$ – Đó là hoành độ của E và F. Theo định lý Vi–ét ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{50k(k-1)}{9+25k^2}.$$

- I là trung điểm EF $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_I$ hay $\frac{50k(k-1)}{9+25k^2} = 2.1 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{25}$

Thay vào (2) có $y = -\frac{9}{25}(x-1)+1 \Leftrightarrow 9x + 25y - 34 = 0.$ (6)

Từ (1) và (6) kết luận : (6) là phương trình đường thẳng (Δ) mà ta cần tìm.

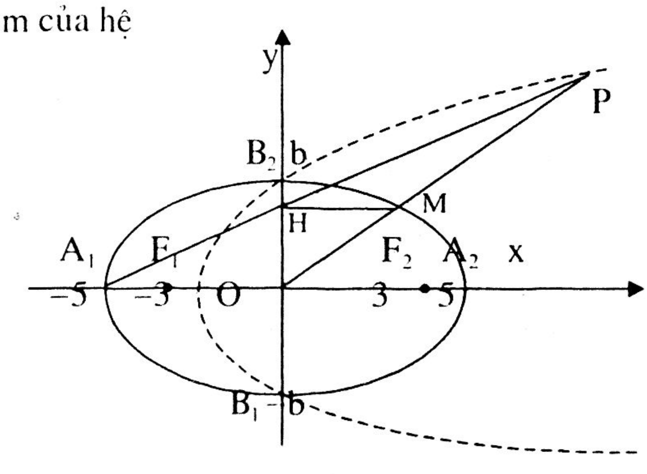
c) Với mọi điểm $M(x_0; y_0)$ ta có :

- Phương trình đường thẳng (OM) là $\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0} \Leftrightarrow y_0x - x_0y = 0$
- H là hình chiếu của M trên Oy $\Leftrightarrow$ H có toạ độ $H(0; y_0)$

Phương trình đường thẳng (AH) là $\frac{x+5}{0+5} = \frac{y-0}{y_0-0} \Leftrightarrow y_0x - 5y + 5y_0 = 0$

- $P=(AH)\cap(OM) \Leftrightarrow$ toạ độ P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y_0x - x_0y = 0 \\ y_0x - 5y + 5y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{5x}{x+5} \\ y_0 = \dfrac{5y}{x+5} \end{array}\right.$$



Hình 126

- $M(x_0; y_0)$ là một điểm thuộc $(\mathscr{E})$

$\Leftrightarrow 9x_0^2 + 25y_0^2 = 225$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{5x}{x+5}\right)^2 + 25\left(\frac{5y}{x+5}\right)^2 = 225$$

$$\Leftrightarrow 9.25x^2 + 25.25y^2 = 9.25(x+5)^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{18}{25}x + 9$$

Vậy khi M thay đổi, P di chuyển trên đường cong $(\mathscr{P})$ cố định có phương trình $y^2 = \frac{18}{25}x + 9$.

Bài toán 5. Tương giao giữa elip và đường thẳng, elip và elip

Thí dụ 13

Định lý :

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng (d) : $Ax + By + C = 0$ có điểm chung với elip $(\mathscr{E})$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ khi và chỉ khi $A^2a^2 + B^2b^2 \geq C^2$.

Lời giải

- (d) và $(\mathscr{E})$ có điểm chung $\Leftrightarrow$ hệ có nghiệm (*) $\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$

Trường hợp 1 : $B = 0$ $(A \neq 0)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{C}{A}$, thế vào (2) có $\dfrac{C^2}{A^2a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{C^2}{A^2b^2}$ (3)

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - \dfrac{C^2}{A^2b^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{C^2}{A^2b^2} \leq 1 \Leftrightarrow A^2b^2 \geq C^2$ hay (do $B = 0$) $A^2a^2 + B^2b^2 \geq C^2$ (4)

Trường hợp 2 : $B \neq 0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow y = -\dfrac{Ax + C}{B}$.

Thế vào (2) có $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(Ax + C)^2}{B^2b^2} = 1 \Leftrightarrow B^2b^2x^2 + a^2(Ax + C)^2 = a^2B^2b^2$

$\Leftrightarrow (A^2a^2 + B^2b^2)x^2 + 2a^2ACx + a^2(C^2 - B^2b^2) = 0$ (5)

- Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (5) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow a^4A^2C^2 - a^2(A^2a^2 + B^2b^2)(C^2 - B^2b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2[a^2A^2C^2 - (A^2a^2C^2 - A^2a^2B^2b^2 + B^2b^2C^2 - B^4b^4)] \geq 0$

$\Leftrightarrow B^2b^2(A^2a^2 + B^2b^2 - C^2) \geq 0 \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 \geq C^2$ (6)

Từ (4) và (6) ta có điều phải chứng minh.

Cách 2 : Đặt $\begin{cases} x = aX \\ y = bY \end{cases}$ hệ (*) trở thành (**) $\begin{cases} AaX + BbY + C = 0 & (7) \\ X^2 + Y^2 = 1 & (8) \end{cases}$

Xét đường thẳng (Δ) : $AaX + BbY = C$ và đường tròn $(\mathscr{C})$: $X^2 + Y^2 = 1$

Rõ ràng $(\mathscr{C})$ có tâm là $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$.

Khoảng cách O từ đường thẳng (Δ) là $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}$.

Hệ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow d \leq R \Leftrightarrow d^2 \leq R^2 \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 \geq C^2$ (đpcm)

Chú ý

- $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2 \Leftrightarrow (\Delta)$ và $(\mathscr{C})$ có hai điểm chung. Ta nói (d) *cắt* $(\mathscr{E})$.
- $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \Leftrightarrow (\Delta)$ và $(\mathscr{C})$ có một điểm chung. Ta nói (d) và $(\mathscr{E})$ *tiếp xúc với nhau.*

Thí dụ 14

Xét vị trí tương đối giữa elip $(\mathscr{E})$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ với mỗi một đường thẳng (d) sau đây : (d_1) : $2x + y + 1 = 0$, (d_2) : $x + y - \sqrt{13} = 0$, (d_3) : $x - 3y + 11 = 0$.

Lời giải

a) Xét cặp $(\mathscr{E})$ và (d_1) có $C^2 = 1$, $A^2a^2 + B^2b^2 = 4.4 + 1.9 = 25 \Rightarrow A^2a^2 + B^2b^2 > C^2$

$\Rightarrow (d_1)$ cắt $(\mathscr{E})$ tại hai điểm phân biệt.

b) Xét cặp ($\mathcal{E}$) và (d_2) có $C^2=13$, $A^2a^2 + B^2b^2 = 4.1 + 1.9 = 13 \Rightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

$\Rightarrow$ (d_1) và ($\mathcal{E}$) tiếp xúc với nhau.

c) Xét cặp ($\mathcal{E}$) và (d_3) có $C^2=121$, $A^2a^2 + B^2b^2 = 4.1 + 9.9 = 103 \Rightarrow A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$

$\Rightarrow$ (d_1) và($\mathcal{E}$) không có điểm chung.

Thí dụ 15

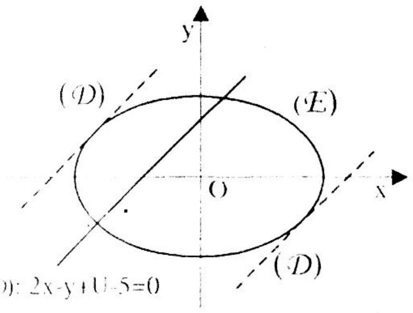
Giả sử x và y liên hệ với nhau bởi hệ thức $36x^2 + 16y^2 = 9$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $U = 2x - y + 5$.

Lời giải

Cách 1: Tập hợp giá trị của U là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 36x^2 + 16y^2 = 9 \\ U = y - 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1 \\ 2x - y + U - 5 = 0 \end{cases}$$



Hình 127

Xét elip ($\mathcal{E}$) : $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{16}} = 1$ và đường thẳng

($\mathcal{D}$): $U = y - 2x + 5 \Leftrightarrow 2x - y + U - 5 = 0$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 \geq C^2 \Leftrightarrow 4 \cdot \dfrac{1}{9} + 1 \cdot \dfrac{9}{16} \geq (U-5)^2$

$$\Leftrightarrow (U-5)^2 \leq \frac{25}{16} \Leftrightarrow |U-5| \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq U - 5 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq U \leq \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \left\{ \min U = \frac{15}{4};\ \max U = \frac{25}{4} \right\}$$

Cách 2. **Đặt** $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{4}\right)$; $\vec{v} = (6x;\ 4y)$

$$\Rightarrow \vec{u}\vec{v} = 2x - y,\ |\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}} = \frac{5}{12},\ |\vec{v}| = \sqrt{36x^2 + 16y^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow |U-5| = |2x-y| = \left|\frac{1}{3}6x - \frac{1}{4}4y\right| = |\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}| = 3.\frac{5}{12} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{4} < U < \frac{25}{4}$$

Dấu đẳng thức :

$$U = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2x + 5 = \dfrac{25}{4} \\ \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 8x = 5 \\ 8y + 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{9}{20} \end{cases}$$

$$U=\frac{15}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}y-2x+5=\dfrac{15}{4}\\ \vec{u},\vec{v}\ \text{cùng hướng}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y-8x=-5\\ 8y+9x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\ y=-\dfrac{9}{20}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\min U=\frac{15}{4};\ \max U=\frac{25}{4}\right\}$$

Lời bình

Bài toán còn có các cách giải khác nữa. Bạn xem Phạm Quốc Phong : "*Chuyên đề nâng cao Đại số 10*", NXB ĐH Sư phạm.

Thí dụ 16

Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip

$$(\mathcal{E}_1):\frac{x^2}{16}+y^2=1 \text{ và } (\mathcal{E}_2):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

Lời giải

Toạ độ giao điểm của $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ là nghiệm của hệ (I) $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+y^2=1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1\end{cases}$

Xem (I) là hệ phương trình bậc nhất đối với x^2 và y^2 ta có

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{16} & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{16}\end{vmatrix}=-\frac{63}{16^2},\ D_{x^2}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{1}{16}\end{vmatrix}=-\frac{15}{16},\ D_{y^2}=\begin{vmatrix}\frac{1}{16} & 1\\ \frac{1}{4} & 1\end{vmatrix}=-\frac{3}{16}$$

$\Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm $\begin{cases}x^2=\dfrac{D_{x^2}}{D}=\dfrac{80}{21}\\ y^2=\dfrac{D_{y^2}}{D}=\dfrac{16}{21}\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=\dfrac{80+16}{21}\Leftrightarrow x^2+y^2=\dfrac{32}{7}$.

Toạ độ các giao điểm của hai elip đã cho thoả mãn phương trình $x^2+y^2=\dfrac{32}{7}$.

Bởi thế nên $x^2+y^2=\dfrac{32}{7}$ là phương trình đường tròn mà ta cần tìm.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho các đường cong :

$(\mathcal{C}_1): 3x^2+4y^2=5$, $(\mathcal{C}_2): 9x^2+16y^2=1$, $(\mathcal{C}_3): (2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})y^2=1$.

Đặt tên cho các đường cong nói trên. Nếu là elip hãy xác định trục lớn, trục bé và toạ độ tiêu điểm của nó.

Bài 2. Cho các đường cong $(\mathscr{C}_1): 8x^2 + 6y^2 = 48$, $(\mathscr{C}_2): \frac{x^2}{2} + 2y^2 = 2$

1) Đặt tên cho các đường cong nói trên. Tìm tâm sai và viết phương trình các đường chuẩn nếu nó là elip.

2) Tìm các bán kính của elip kẻ từ điểm $M(1; 2\sqrt{2})$.

Bài 3. Tìm tâm sai của elip $(\mathscr{C}_1)$ trong mỗi trường hợp sau :

a) Các đỉnh trên trục bé nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

b) Độ dài trục lớn bằng k lần độ dài trục bé $(k > 1)$.

c) Khoảng cách từ một đỉnh trên trục lớn tới một đỉnh trên trục bé bằng tiêu cự.

Bài 4. Cho elip $(\mathscr{E}): x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(\Delta): x - y - 3 = 0$.

1) Chứng minh đường thẳng (Δ) không cắt elip $(\mathscr{E})$.

2) Tìm điểm $M \in (\mathscr{E})$ sao cho khoảng cách d từ nó đến đường thẳng (Δ) là lớn nhất, nhỏ nhất.

☐ $\max(d) = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5}$, ☐ $\max(d) = \frac{3 + \sqrt{5}}{5}$, ☐ khác

☐ $\min(D) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{5}$, ☐ $\min(D) = \frac{3 - \sqrt{5}}{5}$, ☐ khác

Bài 5. Cho elip $(\mathscr{E}): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_0; y_0) \in (\mathscr{E})$.

1) Viết phương trình đường thẳng (Δ), biết rằng M là điểm chung duy nhất của nó với (Δ).

☐ $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ☐ $\frac{x_0x}{2a} + \frac{y_0y}{2b} = 1$ ☐ $\frac{x_0^2x}{a^2} + \frac{y_0^2y}{b^2} = 1$ ☐ khác

2) Tìm M sao cho (Δ) tạo với các trục toạ độ tam giác có diện tích nhỏ nhất.

☐ $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $M_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{-b}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $M_3\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}; \frac{-b}{\sqrt{2}}\right)$ ☐ $M_4\left(\frac{-a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

☐ $M_1\left(a\sqrt{2}; b\sqrt{2}\right)$ ☐ $M_2\left(a\sqrt{2}; -b\sqrt{2}\right)$ ☐ $M_3\left(-a\sqrt{2}; -b\sqrt{2}\right)$

☐ $M_4\left(-a\sqrt{2}; b\sqrt{2}\right)$

Bài 6. Cho elip $(\mathscr{E}): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$. Tìm điểm $M(x; y) \in (\mathscr{E})$ sao cho :

a) Biểu thức $Q = x + 2y$ lớn nhất, nhỏ nhất.

b) Bán kính qua tiêu điểm này bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm kia.

c) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 30^0.

d) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 90^0.

e) Nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120^0.

Bài 7.(ĐH Ngoại thương TP HCM, 97)

Cho elip $(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(\mathscr{D}) : x - y\sqrt{2} + 2 = 0$.

a) Chứng minh đường thẳng $(\mathscr{D})$ luôn cắt $(\mathscr{E})$ tại hai điểm phân biệt. Tính độ dài AB.

☐ $AB = 3\sqrt{2}$ ☐ $AB = 2\sqrt{3}$ ☐ $AB = \sqrt{2}$ ☐ khác

b) Tìm điểm $C \in (\mathscr{E})$ sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

☐ $\max S = 3\sqrt{6}$ ☐ $\max S = 3\sqrt{3}$ ☐ khác

Bài 8 (Đề 79)

Cho elip $(\mathscr{E}) : 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm M(1; 1). Lập phương trình đường thẳng qua M và cắt elip tại hai điểm A, B sao cho MA=MB.

☐ $4x+9y-13=0$ ☐ $9x+4y-13=0$ ☐ $4x-9y+13=0$ ☐ khác

Bài 9 (HV Kỹ thuật Quân sự-97)

Cho elip $(\mathscr{E}) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm A(−2; 0). Giả sử M di động trên elip. Gọi H là hình chiếu vuông góc trên trục Oy của M. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh khi M thay đổi thì P luôn chạy trên một đường cong $(\mathscr{C})$ cố định. Vẽ đường cong $(\mathscr{C})$.

Bài 10 Cho elip $(\mathscr{E}) : 4x^2 + 9y^2 = 36$ và điểm A(0; 3).

1) Tìm toạ độ tiêu điểm, tâm sai của elip. Vẽ elip dựa trên hình chữ nhật cơ sở.

2) Viết phương trình đường thẳng qua M(1; 1) và cắt elip tại hai điểm M_1, M_2 sao cho M là trung điểm của M_1M_2.

3) Giả sử M di động trên elip. Gọi H là hình chiếu vuông góc trên trục Oy của M. Giả sử AH cắt OM tại P. Chứng minh khi M thay đổi thì P luôn chạy trên một đường cong $(\mathscr{C})$ cố định. Vẽ đường cong $(\mathscr{C})$.

§4 ĐƯỜNG HYPEBOL

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2, với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ *trong đó a là một số không đổi nhỏ hơn c.*

- Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các *tiêu điểm* của hypebol.
- Khoảng cách 2c giữa hai tiêu điểm gọi là *tiêu cự* của hypebol.

Nếu điểm M nằm trên hypebol thì các khoảng cách MF_1 và MF_2 gọi là các *bán kính qua tiêu điểm* của điểm M.

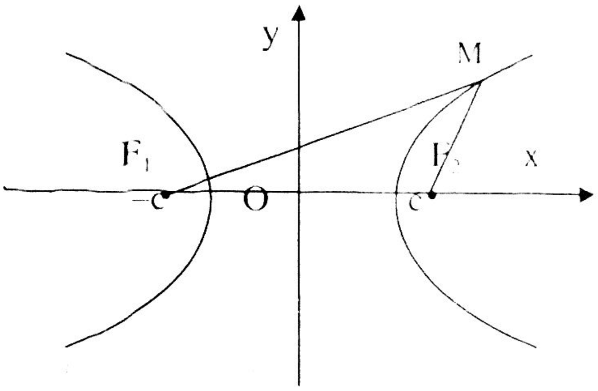
- Trung điểm I của đoạn thẳng F_1F_2 gọi là *tâm* của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của đường hypebol

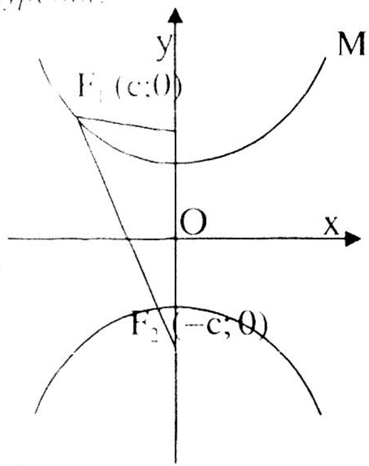
Xét hypebol gồm những điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó $F_1F_2 = 2c$. Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho các tiêu điểm có toạ độ $F_1 = (-c; 0)$, $F_2 = (c; 0)$. (h. 128.1), khi đó hypebol có phương trình là :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{với}\ b^2=c^2-a^2} \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là phương trình chính tắc của hypebol.



Hình 128.1



Hình 128.2

Chú ý :

1) Trong phương trình chính tắc hệ số của x^2 là số dương, hệ số của y^2 là số âm.

2) Công thức bán kính qua tiêu điểm : $MF_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|$, $MF_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$

(Không vuông góc với trục tung, nhưng bán kính qua tiêu điểm biểu diễn được qua một biến duy nhất là x).

3) Cũng là hypebol trên, nhưng nếu chọn hệ trục toạ độ sao cho các tiêu điểm có toạ độ $F_1=(0; -c)$, $F_2=(0; c)$, (h. 128.2), khi đó hypebol có phương trình là :

$$\boxed{-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,\ \text{với}\ b^2=c^2-a^2} \qquad (2)$$

Trong trường hợp này tiêu điểm thuộc trục tung và phương trình (2) *không được gọi* là phương trình chính tắc của hypebol.

3. Hình dạng của hypebol

a) Tính đối xứng

Xét các phương trình (1) và (2). Đó là các phương trình chẵn đối với x và y nên hypebol có trục đối xứng là các đường thẳng Ox và Oy, và do đó nó nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

b) Trục thực, trục ảo

Xét hypebol có phương trình chính tắc (1).

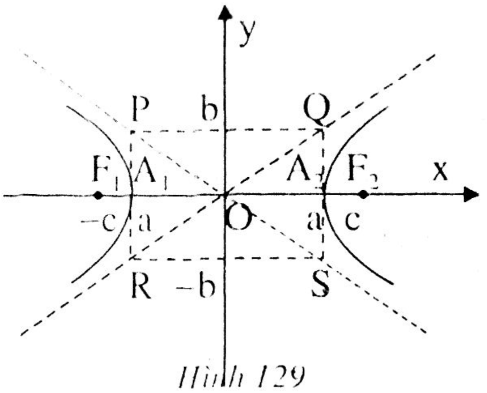
Rõ ràng hypebol không cắt trục Oy.

Trục Oy được gọi là *trục ảo* của hypebol.

Hypebol cắt trục Ox tại hai điểm $A_1(-a; 0)$ và $A_2(a; 0)$.

Hai điểm ấy được gọi là hai đỉnh của hypebol. Ox được gọi là *trục thực* của hypebol.

Tiêu điểm luôn nằm trên trục thực.



Hình 129

Khoảng cách giữa hai đỉnh (bằng 2a) được gọi là *độ dài trục thực*, độ dài 2b được gọi *độ dài trục ảo*.

c) Nhánh của hypebol

Từ (1) $\Rightarrow x^2 \geq a^2$ hay $x \geq a$ hoặc $x \leq -a \Rightarrow$ Không có điểm nào của hypebol nằm giữa hai đường thẳng $x = a$ và $x = -a$.

Hypebol gồm hai nhánh :

Nhánh phải gồm những điểm nằm bên *phải* đường thẳng $x = a$,

Nhánh trái gồm những điểm nằm bên *trái* đường thẳng $x = -a$

d) Tâm sai của hypebol

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực gọi là *tâm sai* của hypebol và ký hiệu là e.

Vậy $e = \frac{c}{a}$. Rõ ràng $e > 1$.

đ) Hình chữ nhật cơ sở và tiệm cận của hypebol

- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a$, $y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở* của hypebol.
- Hình chữ nhật cơ sở có các cạnh là 2a, 2b và độ dài đường chéo 2c.
- Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai *đường tiệm cận* của hypebol. Phương trình của hai đường tiệm cận đó là $y = \pm\frac{b}{a}x$.

4. Đường chuẩn của hypebol

1. Định nghĩa

Cho hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Các đường thẳng $(\Delta_1) : x = -\frac{a}{e}$, $(\Delta_2) : x = \frac{a}{e}$ được gọi là các đường chuẩn của hypebol.

(Δ_1) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_1.

(Δ_2) gọi là đường chuẩn ứng với tiêu điểm F_2.

2. Định lý

Tỉ số giữa khoảng cách từ một điểm bất kì trên hypebol đến một tiêu điểm và đường chuẩn tương ứng bằng tâm sai của hypebol.

$$\frac{MF_i}{d(M,(\Delta_i))} = e\ ,\ \ (i = 1;2)$$

Để ý $\frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} < \frac{a^2}{a} = a$ tức là $\frac{a}{e} < a$ và $-\frac{a}{e} > a \Rightarrow$ Các đường chuẩn không cắt hypebol.

II. BÀI TOÁN VÀ THÍ DỤ

Bài toán 1. Xác định các yếu tố của hypebol

Thí dụ 1

Cho các đường cong :

$$(\mathscr{C}_1) : 9x^2 - 16y^2 = 144,\ (\mathscr{C}_2) : 49x^2 - 64y^2 = -1,\ (\mathscr{C}_3) : x^2 - 25y^2 = 25$$

Đặt tên cho các đường cong nói trên. Nếu là hypebol hãy xác định độ dài các trục, toạ độ tiêu điểm và tâm sai của nó.

Lời giải

a) Xét đường cong $(\mathscr{C}_1)$: $9x^2 - 16y^2 = 144$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Đó là phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

với a = 4, b = 3 $\Rightarrow (\mathscr{C}_1)$ là đường hypebol.

- Trục thực là Ox, độ dài trục thực 2a = 8.
  Trục ảo là Oy, độ dài trục ảo 2b = 6.
- Tiêu điểm : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \Rightarrow$ Hai tiêu điểm $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.
- Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

b) Xét đường cong $(\mathscr{C}_2)$: $49x^2 - 64y^2 = -1$ (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow -\frac{x^2}{\frac{1}{49}} + \frac{y^2}{\frac{1}{64}} = 1$.

Đó là phương trình dạng $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ với $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{7}$ $\Rightarrow (\mathscr{C}_2)$ là đường hypebol.

Trục thực là Oy, độ dài trục thực $2a = \frac{1}{4}$.

Trục ảo là Ox, độ dài trục ảo $2b = \frac{2}{7}$.

- Tiêu điểm : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{113}}{56}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm $F_1\left(0; -\frac{\sqrt{113}}{56}\right)$, $F_2\left(0; -\frac{\sqrt{113}}{56}\right)$.

- Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{113}}{14}$

c) Xét đường cong $(\mathscr{C}_3)$: $x^2 - 25y^2 = 25$. (3)

Ta có (3) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{1} = 1$. Đó là phương trình dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

với a = 5, b = 1 $\Rightarrow (\mathscr{C}_3)$ là đường hypebol.

- Trục thực là Ox, độ dài trục thực $2a=10$.
  Trục ảo là Oy, độ dài trục ảo $2b = 2$.
- Tiêu điểm : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{26}\ ;\ 0)$, $F_2(\sqrt{26}\ ;\ 0)$.

- Tâm sai : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{26}}{5}$.

Thí dụ 2$^{(P)}$

Cho các đường cong $(\mathscr{C}_1): 9x^2-36y^2=4$, $(\mathscr{C}_2):(2\sqrt{3}+4)x^2+y^2=4-2\sqrt{3}$.
Đặt tên cho các đường cong nói trên. Chỉ ra trục thực, trục ảo, tiêu điểm, tâm sai và phương trình các đường chuẩn, đường tiệm cận của hypebol đó.

Lời giải

a) Xét đường cong $(\mathscr{C}_1): 9x^2-36y^2=4$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{4}{9}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$. Đó là phương trình dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

với $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow (\mathscr{C}_3)$ là đường hypebol.

- Trục thực là Ox, độ dài trục thực $2a=\dfrac{4}{3}$.

  Trục ảo là Oy, độ dài trục ảo $2b=\dfrac{2}{3}$.

- Tiêu điểm : $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3};\ 0\right)$, $F_2\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3};\ 0\right)$.

- Tâm sai : $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

- Phương trình đường chuẩn : $x=\pm\dfrac{a}{c}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

- Phương trình đường tiệm cận : $y=\pm\dfrac{b}{a}x \Leftrightarrow y=\pm\dfrac{x}{2}$

b) Xét đường cong $(\mathscr{C}_2):(2\sqrt{3}+4)x^2-y^2=2\sqrt{3}-4$. (2)

Ta có (2) $\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-4}x^2-\dfrac{y^2}{2\sqrt{3}-4}=1 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}-1)^2}=1$.

Đó là phương trình dạng $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ với $a=\sqrt{3}-1$, $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\Rightarrow (\mathscr{C}_2)$ là đường hypebol.

- Trục thực là Oy, độ dài trục thực $2a = 2(\sqrt{3} - 1)$.

  Trục ảo là Ox, độ dài trục ảo $2b = \sqrt{3} - 1$.

- Tiêu điểm : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4} + (\sqrt{3} - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$

$\Rightarrow$ Hai tiêu điểm $F_1\left(0;\ -\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}\right)$, $F_2\left(0;\ -\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}\right)$.

- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
- Phương trình đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a}{c} = \pm\dfrac{2\sqrt{5}(\sqrt{3} - 1)}{5}$.
- Phương trình đường tiệm cận : $y = \pm\dfrac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{x}{2}$.

Bài toán 2. Viết phương trình của hypebol

Thí dụ 3

Viết phương trình *chính tắc* của hypebol $(\mathscr{H})$ biết rằng $(\mathscr{H})$ có :

a) Ox là trục thực và độ dài trục thực bằng 6, tiêu cự bằng 10.

b) Một tiêu điểm $F(-\sqrt{13}; 0)$ và độ dài trục lớn bằng 8.

c) Tiêu cự bằng 12, tâm sai bằng 3 và tiêu điểm thuộc trục hoành.

Lời giải

a) Theo giả thiết $\begin{cases} 2a = 6 \\ 2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow c^2 - a^2 = 16$ hay $b^2 = 16$

Vì Ox là trục thực suy ra $(\mathscr{H})$ có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) Một tiêu điểm $F(-5; 0)$ và độ dài trục ảo bằng 4.

Do $F(-\sqrt{13}; 0) \Rightarrow \begin{cases} \text{Oy là trục thực.} & (1) \\ c = \sqrt{13} & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow (\mathscr{H})$ có phương trình dạng $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (3)

Từ $\begin{cases} c = \sqrt{13} \\ \text{Độ dài trục ảo bằng 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 = 13 \\ 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases}$ (4)

Thay (4) vào (3) có $-\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Đó là phương trình của hypebol cần tìm

c) Tiêu điểm thuộc trục hoành $\Leftrightarrow$ Phương trình chính tắc của hypebol có dạng

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

$$\bullet\begin{cases}\text{Tiêu cự bằng } 12\\ \text{Tâm sai bằng } 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2c=12\\ \dfrac{c}{a}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=6\\ a=2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $c^2-a^2=24-4=20$ hay $b^2=20$.

Thay vào (8) có phương trình hypebol phải tìm là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{20}=1$

Thí dụ 4

Viết phương trình của hypebol $(\mathscr{H})$ trong mỗi trường hợp sau :

a) Một tiêu điểm $F_2(\sqrt{10}\,;0)$ và điểm $M(3\sqrt{2};1)$ nằm trên $(\mathscr{H})$.

b) Đi qua hai điểm $M(3;-2\sqrt{2})$ và $N\left(-1;\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ và tiêu điểm thuộc trục tung.

Lời giải

a) Do $F(\sqrt{10}\,;0)\Rightarrow\begin{cases}\text{Ox là trục thực.} & (1)\\ c=\sqrt{10} & (2)\end{cases}$

• Từ (1)$\Rightarrow$ $(\mathscr{H})$ có phương trình dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (3)

• M $(3\sqrt{2};1)$ thuộc $(\mathscr{H})\Leftrightarrow\dfrac{18}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\Leftrightarrow 18b^2-a^2=a^2b^2.$ (4)

Từ (2) $\Rightarrow b^2=c^2-a^2=10-a^2$, thay vào (4) có $18(10-a^2)-a^2=a^2(10-a^2)$

$$\Rightarrow a^4-29a^2+180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a_1^2=20\\ a_2^2=9\end{array}\right.$$

Với $a_1^2=20$, ta có $b_1^2=10-a_1^2=10-20=-10<0$ (mâu thuẫn) (5)

Với $a_2^2=9$, ta có $b_2^2=10-a_1^2=10-9=1$ (thích hợp)

Thay $a_2^2=9$ và $b_2^2=1$ vào (3) ta có $\dfrac{x^2}{9}-y=1.$ (6)

Từ (5) và (6) kết luận : Hypebol có *phương trình chính tắc* là $\dfrac{x^2}{9}-y=1.$

b) Tiêu điểm thuộc trục tung $\Leftrightarrow$ Oy là trục thực $\Leftrightarrow$ Phương trình của hypebol có dạng $-\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ (7)

• M và N thuộc $(\mathscr{H})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{8}{a^2}=1 \\ -\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{8}{3a^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}=1 \\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2 \\ b^2=3 \end{cases}$

Thay vào (7) có $-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$. Đó là phương trình của hypebol cần tìm .

Thí dụ 5

Viết phương trình của hypebol $(\mathscr{H})$ trong mỗi trường hợp sau :

a) Chứa điểm M(−6; 4) và các đường tiệm cận tạo với trục hoành một góc 60^0.

b) Chứa điểm N(2; 5) và có chung hình chữ nhật cơ sở với elip $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Lời giải

Xét các hypebol $(\mathscr{H})$ có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$. Đó là hai hypebol cùng nhận $y=\dfrac{b}{a}x$ làm đường tiệm cận.

Trường hợp 1 : Xét $(\mathscr{H})$ có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (1)

• Các đường tiệm cận của $(\mathscr{H})$ là $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. Chúng tạo với trục hoành một góc $60^0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}=\text{tg}60^0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}=\sqrt{3} \Leftrightarrow b=a\sqrt{3}$, thay vào (1) có $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$ (2)

$M\in(\mathscr{H}) \Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{3a^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2}=1 \Leftrightarrow a^2=4$, thay vào (3) có $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$. (3)

Trường hợp 2 : Xét $(\mathscr{H})$ có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

Khi đó $M\in(\mathscr{H}) \Leftrightarrow \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{3a^2}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2}=-1$ (Mâu thuẫn) (4)

Từ (3), (4) kết luận : Phương trình hypebol phải tìm là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

b) $(\mathscr{H})$ có chung hình chữ nhật cơ sở với elip $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\Leftrightarrow$ Phương trình của $(\mathscr{H})$ có dạng $\dfrac{x^2}{3m^2}-\dfrac{y^2}{4m^2}=\pm 1$.

Trường hợp 1 : Xét $(\mathscr{H})$ có phương trình $\dfrac{x^2}{3m^2}-\dfrac{y^2}{4m^2}=-1$.

$N\left(\sqrt{3};\ 12\right) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3m^2} - \dfrac{12^2}{4m^2} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{35}{m^2} = -1$ (mâu thuẫn) (1)

Trường hợp 2 : Xét ($\mathcal{H}$) có phương trình $\dfrac{x^2}{3m^2} - \dfrac{y^2}{4m^2} = 1$

$N\left(\sqrt{3};\ 12\right) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3m^2} - \dfrac{12^2}{4m^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{35}{m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = 35.$

Thay vào (1) có $\dfrac{x^2}{3.35} - \dfrac{y^2}{4.35} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{105} - \dfrac{y^2}{140} = 1$ (2)

Từ (1), (2) kết luận : Phương trình hypebol cần tìm là $\dfrac{x^2}{105} - \dfrac{y^2}{140} = 1.$

Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của hypebol

Thí dụ 6 (Đề 147)

Cho hypebol ($\mathcal{E}$) : $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ (1)

Gọi ($\mathcal{D}$) là đường thẳng qua O có hệ số góc bằng k, ($\mathcal{D}$') là đường thẳng qua O và vuông góc với ($\mathcal{D}$).

1) Tìm điều kiện của k để ($\mathcal{D}$) và ($\mathcal{D}$') đều cắt hypebol.

2) Tính theo k diện tích S của hình thoi có bốn đỉnh là giao của ($\mathcal{E}$) với hai đường thẳng ($\mathcal{D}$) và ($\mathcal{D}$').

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích S.

Lời giải

Do trục Oy không cắt hypebol nên ta chỉ xét đường thẳng ($\mathcal{D}$) đi qua O và có hệ số góc bằng k $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{D}$) có phương trình y = kx.

- Toạ độ giao điểm của ($\mathcal{D}$) và ($\mathcal{H}$) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(kx)^2}{9} = 1 \\ y = kx \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} (9 - 4k^2)x^2 = 36 & (1) \\ y = kx & (2) \end{cases}$$

- ($\mathcal{D}$) cắt ($\mathcal{H}$) $\Leftrightarrow$ Hệ (*) có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm

$\Leftrightarrow 9 - 4k^2 > 0 \Leftrightarrow k^2 < \dfrac{9}{4}.$ (3)

- Để tồn tại đường thẳng ($\mathcal{D}$') : ($\mathcal{D}$') $\perp$ ($\mathcal{D}$) thì $k \neq 0$ (4)

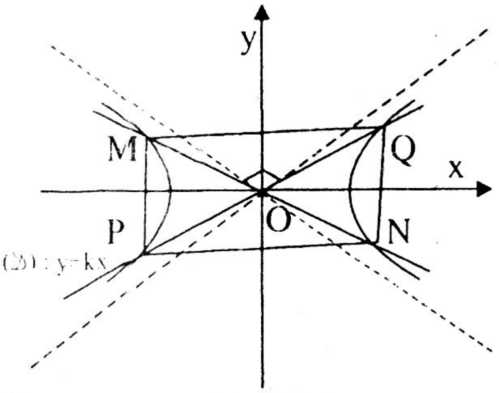
- Khi đó phương trình đường thẳng ($\mathcal{D}$') qua O và ($\mathcal{D}$')$\perp$ ($\mathcal{D}$) là $y = -\dfrac{1}{k}x$

- Tương tự trên có $(\mathscr{D}')$ cắt $(\mathscr{H})$ $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{k}\right)^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow k^2 > \frac{4}{9}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra $(\mathscr{D})$ và $(\mathscr{D}')$ cùng cắt $(\mathscr{H})$ $\Leftrightarrow \frac{4}{9} < k^2 < \frac{9}{4}$. (6)

2) Gọi $(\mathscr{D})\cap(\mathscr{H})=\{P, Q\}$, $(\mathscr{D}')\cap(\mathscr{H})=\{M, N\}$

Do O là tâm đối xứng của hypebol $(\mathscr{H})$ kết hợp với $(\mathscr{D}') \perp (\mathscr{D})$ suy ra MQNP là hình thoi và S = 2OM.OP. (7)



Hình 130

Từ (*) có $\begin{cases} x_P^2 = \dfrac{36}{9-4k^2} \\ x_P^2 + y_P^2 = (1+k^2)x_P^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_P^2 + y_P^2 = \dfrac{36(1+k^2)}{9-4k^2}$ hay

$OP^2 = \dfrac{36(1+k^2)}{9-4k^2} \Leftrightarrow OP = \dfrac{6\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{9-4k^2}}$ (8)

Trong (8) thay k bởi $-\dfrac{1}{k}$ ta có $OM = \dfrac{6\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{9k^2-4}}$ (9)

Thay (8), (9) vào (7) có $S = \dfrac{72(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}}$.

3) Theo bất đẳng thức Côsi $\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \le \dfrac{1}{2}[(9-4k^2)+(9k^2-4)]$

$\Leftrightarrow \sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)} \le \dfrac{5(1+k^2)}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(1+k^2)}{\sqrt{(9-4k^2)(9k^2-4)}} \ge \dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow S \ge \dfrac{72.2}{5} = \dfrac{144}{5}$. Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $9-4k^2 = 9k^2-4 \Leftrightarrow k^2 = 1$

$\Leftrightarrow k = \pm 1 \Leftrightarrow (\mathscr{D})$ và $(\mathscr{D}')$ là hai đường phân giác của góc tạo bởi các trục toạ độ.

Do vậy $\min S = \dfrac{144}{5}$ (đvdt).

Thí dụ 7 (Đề 33)

Chứng minh tích các khoảng cách từ một điểm bất kì trên hypebol $(\mathscr{H}) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đến các đường tiệm cận của nó là một số không đổi.

Lời giải

- Phương trình các đường tiệm cận của hypebol $(\mathscr{H}) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ là $y = \pm\dfrac{b}{a}x$

$\Leftrightarrow bx \pm ay = 0$

- $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1.$ (1)

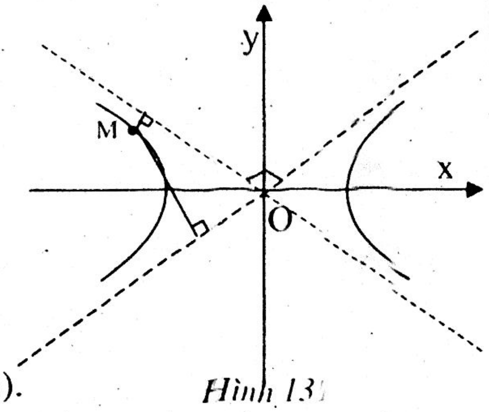
- Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ lần lượt đến hai đường tiệm cận ấy là

$$d_1 = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ d_2 = \frac{|ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

suy ra $d_1d_2 = \dfrac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \dfrac{|ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$= \frac{|a^2x_0^2 - b^2y_0^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right| \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $d_1d_2 = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (const) (đpcm).



Hình 13

Thí dụ 8 (Đề 137)

Trong mặt phẳng toạ độ cho hypebol $(\mathcal{H}) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

1) Tìm độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.

2) Tìm khoảng cách từ tiêu điểm của hypebol tới các đường tiệm cận

3) Chứng minh chân đường vuông góc hạ từ tiêu điểm tới đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.

Lời giải

1) Độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn.

Hypebol $(\mathcal{H}) : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đường chuẩn là $(\Delta_1) : x = -\dfrac{a^2}{c}$,

$(\Delta_2) : x = \dfrac{a^2}{c}$ và hai đường tiêm cận là $(\mathcal{D}_1) : y = -\dfrac{b}{a}x$ và $(\mathcal{D}_2) : y = \dfrac{b}{a}x$.

Gọi $I(x_1; y_1) = (\Delta_1) \cap (\mathcal{D}_1)$ suy ra

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a^2}{c} \\ y_1 = -\dfrac{b}{a}x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{a^4}{c^2} \\ y_1^2 = \dfrac{b^2}{a^2}x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{a^4}{a^2+b^2} \\ x_1^2 + y_1^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2}x_1^2 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

hay $OI^2 = a^2 \Leftrightarrow OI = a.$

Do tính chất đối xứng của hypebol suy ra độ dài phần đường tiệm cận chắn bởi hai đường chuẩn bằng $2OI = 2a$.

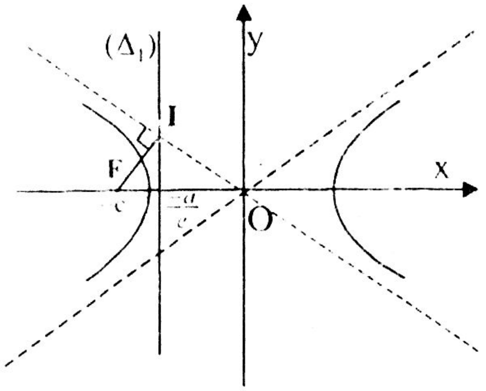
2) Khoảng cách từ tiêu điểm tới các đường tiệm cận.

Khoảng cách từ tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ tới đường tiệm cận $(\mathcal{D}_1) : y = -\dfrac{b}{a}x$

$\Leftrightarrow bx + ay = 0$

là $d = \dfrac{|b(-c) + a.0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{bc}{c} = b$

Do tính chất đối xứng của hypebol nên đó cũng là khoảng cách từ F_1 đến $(\mathscr{D}_2)$ và cũng là khoảng cách từ F_2 đến $(\mathscr{D}_1)$, $(\mathscr{D}_2)$.



Hình 132

3) *Chứng minh chân đường vuông góc hạ từ tiêu điểm tới đường tiệm cận nằm trên đường chuẩn tương ứng với tiêu điểm đó.*

Xét điểm I nói ở câu 1. Điều cần chứng minh tương đương với chứng minh $OI \perp FI$. Theo kết quả hai câu trên ta có $OI^2 + FI_1^2 = a^2 + b^2 = c^2 = OF_1^2$

$\Leftrightarrow \Delta OIF_1$ vuông tại I. (đpcm)

Bài toán 4. Tương giao giữa hypebol với đường thẳng, giữa hypebol với hypebol

Thí dụ 9 (Đề 109)

Định lý :

Chứng minh rằng để đường thẳng (d) : Ax + By + C = 0 có điểm chung với hypebol $(\mathscr{H})$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, điều kiện cần và đủ là $Aa^2 - B^2b^2 \le C^2$

Lời giải

- (d) và $(\mathscr{H})$ có điểm chung $\Leftrightarrow$ $(*)\begin{cases} Ax + By + C = 0 & (1) \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Trường hợp 1 : $B = 0$ $(A \neq 0)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{C}{A}$, thế vào (2) có $\dfrac{C^2}{A^2a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{C^2}{A^2b^2} - 1 \qquad (3)$$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{C^2}{A^2b^2} - 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{C^2}{A^2b^2} \ge 1 \Leftrightarrow A^2b^2 \le C^2$ hay (*do B=0*) $A^2a^2 - B^2b^2 \le C^2$ (4)

Trường hợp 2 : $B \neq 0$. khi đó (1) $\Leftrightarrow y = -\dfrac{Ax + C}{B}$.

Thế vào (2) có $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(Ax + C)^2}{B^2b^2} = 1 \Leftrightarrow B^2b^2x^2 - a^2(Ax + C)^2 = a^2B^2b^2$

⇔ $(A^2a^2 - B^2b^2)x^2 + 2a^2ACx + a^2(C^2 + B^2b^2) = 0$ (5)

- Hệ (*) có nghiệm ⇔ Phương trình (5) có nghiệm ⇔ $\Delta' \ge 0$

⇔ $a^4A^2C^2 - a^2(A^2a^2 - B^2b^2)(C^2 + B^2b^2) \ge 0$

⇔ $a^2[a^2A^2C^2 - (A^2a^2C^2 + A^2a^2B^2b^2 - B^2b^2C^2 - B^4b^4)] \ge 0$

⇔ $B^2b^2(A^2a^2 - B^2b^2 - C^2) \le 0 \Leftrightarrow A^2a^2 - B^2b^2 \le C^2$ (6)

Từ (4) và (6) ta có điều phải chứng minh.

Chú ý

- $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$ ⇔ (Δ) và $(\mathcal{H})$ có hai điểm chung. Ta nói (d) *cắt* $(\mathcal{H})$.
- $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ ⇔ (Δ) và $(\mathcal{H})$ có một điểm chung. Ta nói (d) và $(\mathcal{H})$ *tiếp xúc với nhau*.

Thí dụ 10

Xét vị trí tương đối giữa hypebol $(\mathcal{H})$: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ với mỗi một đường thẳng sau đây :

$(d_1) : 2x - y + 3 = 0$, $(d_2) : 3x - 2y - \sqrt{17} = 0$, $(d_3) : 5x - 3y + 8 = 0$

Lời giải

a) Xét cặp $(\mathcal{H})$ và (d_1) có $C^2 = 9$, $A^2a^2 - B^2b^2 = 2.9 - (-1)^2.16 = 2$

⇒ $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2$ ⇒ (d_1) cắt $(\mathcal{H})$.

b) Xét cặp $(\mathcal{H})$ và (d_2) có $C^2 = 17$, $A^2a^2 - B^2b^2 = 9.9 - 4.16 = 17$

⇒ $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

⇒ (d_2) và $(\mathcal{H})$ tiếp xúc với nhau.

c) Xét cặp $(\mathcal{H})$ và (d_3) có $C^2=64$, $A^2a^2-B^2b^2=25.9-9.16=81$

⇒ $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2$ ⇒ (d_1) không có điểm chung với $(\mathcal{H})$.

Thí dụ 11[P]

Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip

$$(\mathcal{H}_1) : \frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \quad \text{và} \quad (\mathcal{H}_2) : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Lời giải

Toạ độ giao điểm của $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ là nghiệm của hệ (I) $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

Xem (I) là hệ phương trình với x^2 và y^2 ta có

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{16} & -1 \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{39}{1600}, D_{x^2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{4}, D_{y^2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{16} & 1 \\ \frac{1}{25} & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{400}$$

$\Rightarrow$ Hệ (I) có nghiệm $\begin{cases} x^2 = \dfrac{D_{x^2}}{D} = \dfrac{400}{13} \\ y^2 = \dfrac{D_{y^2}}{D} = \dfrac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = \dfrac{400+12}{13} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \dfrac{412}{13}$.

Toạ độ các giao điểm của hai elip đã cho thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 = \dfrac{412}{13}$.

Bởi thế nên $x^2 + y^2 = \dfrac{412}{13}$ là phương trình đường tròn mà ta cần tìm.

Bài toán 5. Tập hợp điểm với hypebol

Thí dụ 12 (Đại học Ngoại thương, A- 2001)

Cho họ đường cong $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{25-m^2} = 1$ trong đó m là tham số, $m \neq 0$ và $m \neq \pm 5$

1) Đặt tên cho $(\mathscr{C}_m)$, tuỳ theo các giá trị của m.

2) Giả sử A là một điểm tuỳ ý trên đường thẳng x=1 và A không thuộc trục hoành. Chứng minh rằng với mỗi A luôn có bốn đường của họ $(\mathscr{C}_m)$ đi qua.

Hỏi trong số bốn đường cong đó có bao nhiêu elip và có bao nhiêu hypebol ?

Lời giải

a) $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn $\Leftrightarrow m^2 = 25 - m^2 \Leftrightarrow m^2 = \dfrac{25}{2}$

$(\mathscr{C}_m)$ là elip $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq m^2 \neq \dfrac{25}{2} \\ 25 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \pm\dfrac{5}{\sqrt{2}} \neq |m| > 5.$

$(\mathscr{C}_m)$ là hypebol $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 25 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < |m| < 5.$

b) Gọi $A(1; \alpha)$, $\alpha \neq 0$ là một điểm trên thuộc đường thẳng x = 1 và $A \notin Ox$

- $A \in (\mathscr{C}_m) \Leftrightarrow \dfrac{1^2}{m^2} + \dfrac{\alpha^2}{25-m^2} = 1 \Leftrightarrow m^4 - (\alpha^2 + 26)m^2 + 25 = 0$ (1)

Đặt $m^2 = t$. Phương trình (1) trở thành $f(t) = t^2 - (\alpha^2 + 26)t + 25 = 0$ (2)

Thấy rằng $f(25) = -2\alpha^2$ với mọi $\alpha \neq 0$. Lại có $A = 1 > 0$, $S = (a^2 + 26) > 0$, $P = 25 > 0$ suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm $0 < t_1 < 25 < t_2$ hay phương trình (1) luôn có bốn nghiệm m.

Rõ ràng hai nghiệm ứng với $m^2 = t_1 < 25$ cho ta hai elip, hai nghiệm ứng với $m^2 = t_2 > 25$ cho ta hai hypebol.

Thí dụ 13

Trên mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy cho hai điểm cố định A và B. Gọi M là một điểm thay đổi ($M \neq A$, $M \neq B$) và N là hình chiếu của M trên đường thẳng (AB). Tìm tập hợp điểm M sao cho $\frac{MN^2}{NA.NB} = k$, trong đó k là số thực dương cho trước.

Lời giải

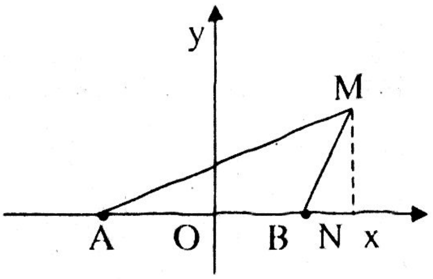
Giả sử AB có độ dài bằng 2a ($a > 0$). Ta chọn hệ trục toạ độ sao cho các điểm A, B có toạ độ $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$. Gọi toạ độ của M là $M(x_1; y_1)$ ta có

$MN = |y_1|$, $NA = x_1 + a$, $NB = x_1 - a$.

Do $M \neq A$, $M \neq B \Rightarrow x_1 \neq \pm a$. Bởi thế

$$\frac{MN^2}{NA.NB} = k \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{(x_1 - a)(x_1 + a)} = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1^2}{x_1^2 - a^2} = k \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{ka^2} = 1$$



Hình 133

$\Rightarrow$ Tập hợp M là hypebol có phương trình $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ka^2} = 1$.

Thí dụ 14 (Đề 82)

Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2+y^2=1$. Đường tròn $(\mathscr{C})$ cắt trục tung ở $A(0; 1)$ và $B(0; -1)$. Đường thẳng $y=m$ ($-1 < m < 1$); $m \neq 0$) cắt $(\mathscr{C})$ tại T và S. Đường thẳng qua A, T cắt đường thẳng qua B, S tại P. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

Lời giải

Gọi $S(x_0; y_0)$ là giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2+y^2=1$

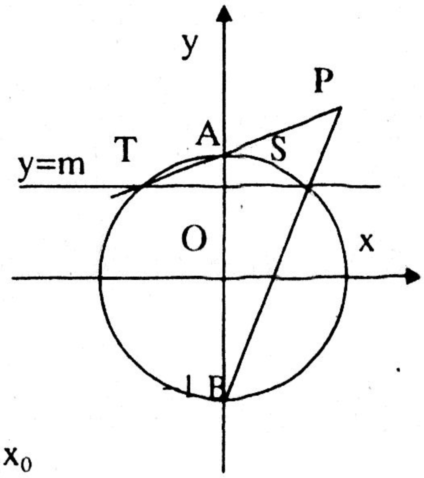
Do T và S đối xứng với nhau qua trục Oy nên toạ độ của T là $T(-x_0; y_0)$. (h. 134)

Do $-1 < m < 1$, $m \neq 0$ nên, $0 < |y_0| < 1$, $0 < |x_0| < 1$.

- Phương trình đường thẳng AT là

$$\frac{x - x_T}{x_A - x_T} = \frac{y - y_T}{y_A - y_T} \text{ hay } \frac{x + x_0}{0 + x_0} = \frac{y - y_0}{1 - y_0}$$

$\Leftrightarrow (1 - y_0)(x + x_0) = x_0(y - y_0) \Leftrightarrow (y_0 - 1)x + x_0y = x_0$



Hình 124

- Phương trình đường thẳng BS là

$$\frac{x - x_S}{x_B - x_S} = \frac{y - y_S}{y_B - y_S} \text{ hay } \frac{x - x_0}{0 - x_0} = \frac{y - y_0}{-1 - y_0} \Leftrightarrow (1 + y_0)(x - x_0) = x_0(y - y_0)$$

$\Leftrightarrow (y_0 + 1)x - x_0y = x_0$

$P = (AT) \cap (BS) \Leftrightarrow$ Toạ độ P là nghiệm của hệ $\begin{cases} (y_0 - 1)x + x_0y = x_0 \\ (y_0 + 1)x - x_0y = x_0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_0}{y_0} \\ y = \dfrac{1}{y_0} \end{cases} \Rightarrow y^2 - x^2 = \frac{1 - x_0^2}{y_0^2} = \frac{y_0^2}{y_0^2} = 1 \quad (\text{Do } S \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = 1)$$

Vậy tập hợp P là hypebol có phương trình $y^2 - x^2 = 1$

BÀI TẬP

Bài 1. Xác định trục thực, trục ảo, toạ độ tiêu điểm của các hypebol sau

a) $25x^2 - 16y^2 = 1$, b) $2x^2 - 10y^2 + 10 = 0$

Câu a) Trục thực Ox, độ dài : $\left\{\frac{2}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{20}{41};\ 5\right\}$

Trục ảo Oy, độ dài : $\left\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{5};\ \frac{41}{20};\ 3\right\}$

Tiêu điểm : $F\left(\pm\frac{\sqrt{41}}{20};\ 0\right)$, $F\left(0;\ \pm\frac{\sqrt{41}}{20}\right)$, $F\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{5}};\ 0\right)$, $F\left(0;\ \pm\frac{\sqrt{13}}{20}\right)$,

Câu b) Trục thực Oy, độ dài : $\left\{2;\ 1;\ 2\sqrt{5};\ 5\right\}$

Trục ảo Ox, độ dài : $\left\{2\sqrt{5};\ \sqrt{5};\ 2\sqrt{6};\ 3\right\}$

Tiêu điểm : $F\left(0;\ \pm\sqrt{6}\right)$, $F\left(\pm\sqrt{6};\ 0\right)$, $F\left(0;\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$, $F\left(0;\ \pm 2\sqrt{6}\right)$,

Bài 2. Trong hệ toạ độ Oxy cho hai điểm $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$. Gọi $(\mathscr{C})$ là đường tròn thay đổi qua A_1, A_2; MM' là đường kính của $(\mathscr{C})$ và luôn song song với Ox. Tìm quỹ tích các điểm M và M'.

Bài 3. Cho a, b là hai số thực cho trước. Tìm quỹ tích các điểm M có toạ độ (x; y) với $x = \dfrac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{2at}{1 - t^2}$

Bài 4. Lập phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp sau :

a) Nửa trục thực là 4, tiêu cự bằng 10.

b) Tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận là $y = \dfrac{2}{3}x$

c) Tâm sai $e = \sqrt{5}$, hypebol qua điểm $(\sqrt{6};\ 10)$

Bài 5. Cho đường cong $(\mathscr{C}_m)$: $(m^2 - 4)x^2 - 4y^2 = 4(m^2 - 4)$, m là tham số.

a) Tuỳ theo giá trị của m, hãy đặt tên cho đường cong. Trong mỗi trường hợp tương ứng, cho biết tâm, tiêu điểm, tiệm cận (nếu có) của đường cong ấy.

Vẽ trên cùng một hình đồ thị $(\mathscr{C}_0)$ và $(\mathscr{C}_{2\sqrt{2}})$.

Bài 6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$ và $A(2;\ 0)$.

a) Viếp phương trình hypebol $(\mathscr{H})$ qua A nhận F_1, F_2 làm tiêu điểm.

b) Tìm toạ độ điểm M trên $(\mathscr{H})$ sao cho $MF_2 = 2MF_1$.

Bài 7. Viết phương trình và vẽ hình của hypebol trong mỗi một trường hợp sau :

a) Trục thực thuộc Ox và có độ dài bằng 6, trục ảo thuộc Oy và có độ dài bằng 6.

b) Độ dài trục thực bằng 6, tâm sai bằng $\frac{4}{3}$.

c) Các tiêu điểm thuộc Ox, tiêu cự bằng 12 và một tiệm cận có phương trình $x + 2y = 0$.

d) Các tiêu điểm thuộc Oy, độ dài trục thực bằng 8 và hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

e) Đi qua điểm P(2; 2) và mỗi đường tiệm cận tạo với trục Ox một góc bằng 60^0.

f) Đi qua điểm $Q(\sqrt{2}; 2)$ và có hai đường tiệm cận là $y = \pm 2x$.

g) Đi qua điểm R(3; 2) và có hai đường chuẩn $y = \pm\frac{x}{2}$.

h) Hai trục trùng với trục toạ độ và đi qua hai điểm $A(\sqrt{6}; -1)$ và $B(4; \sqrt{6})$.

Bài 8. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và hypebol ($\mathscr{H}$) trong mỗi một trường hợp sau :

$$\text{a)}\begin{cases}(d): x - y - 4 = 0\\ (\mathscr{H}): \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1\end{cases},\quad \text{b)}\begin{cases}(d): 2x + y = 0\\ (\mathscr{H}): \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 1\end{cases},\quad \text{c)}\begin{cases}(d): kx + y + 1 = 0\\ (\mathscr{H}): x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1\end{cases}$$

Bài 9. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của elip

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ và hypebol } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Bài. 10

Cho hai đường tròn ngoài nhau. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.

§3. ĐƯỜNG PARABOL

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Parabol là tập hợp các điểm trong mặt phẳng cách đều một đường thẳng Δ cố định và một điểm F cố định không thuộc Δ

Như vậy : Điểm M ∈ parabol ⇔ MF = MH

(Trong đó H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống Δ)

- Điểm F được gọi là *tiêu điểm* của parabol.
- Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol.
- Tỷ số các khoảng cách từ M đến điểm F và đường thẳng (Δ) gọi là *tâm sai* của parabol và kí hiệu là e. Như vậy $e = \dfrac{MF}{d(M,(\Delta))}$. Rõ ràng e = 1

2. Phương trình chính tắc của parabol

Chọn hệ trục toạ độ như sau :

Trục Ox là đường thẳng qua tiêu điểm F và vuông góc với đường thẳng Δ, hướng dương từ P đến F. Trục Oy là trung trực của PF.

Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là p, hiển nhiên $p > 0$.

Khi đó, trong hệ toạ độ đã chọn : $F=\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, $P=\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$. Như vậy đường chuẩn có phương trình $x=-\frac{p}{2}$ và parabol có phương trình là

$$\boxed{y^2=2px, \text{ trong đó } p>0} \qquad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là *phương trình chính tắc* của parabol, p được gọi là *tham số tiêu*, $p > 0$.

Chú ý. Công thức bán kính qua tiêu điểm : $MF = x + \frac{p}{2}$

3. Hình dạng của parabol

Từ phương trình (1) suy ra

a) $x \geq 0 \Rightarrow$ Các điểm của parabol đều nằm về phía phải của trục tung, cùng phía với tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

b) Đó là phương trình chẵn đối với y nên parabol có trục đối xứng là Ox.

c) Gốc toạ độ O là giao của parabol với trục Ox. Điểm ấy gọi là *đỉnh* của parabol. Đó cũng là điểm chung duy nhất của Oy với parabol.

Chú ý. Cũng là parabol trên nhưng chọn hệ trục toạ độ sao cho :

a) $F=\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, $P=\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ (đổi hướng trục Ox so với ban đầu) ta có phương trình của parabol là $y^2 = -2px$ (2)

b) $F=\left(0; \frac{p}{2}\right)$, $P=\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ (trục Oy là đường thẳng qua tiêu điểm F và vuông góc với đường thẳng Δ, hướng dương từ P đến F. Trục Ox là trung trực của PF), ta có phương trình của parabol là $x^2 = 2py$. (3)

c) $F=\left(0; -\frac{p}{2}\right)$, $P=\left(0; \frac{p}{2}\right)$(đổi hướng trục Ox so với trường hợp b) ta có phương trình của parabol là $x^2 = -2py$. (4)

* Cả ba phương trình (2), (3), (4) đều *không được gọi* là phương trình chính tắc của parabol.

c) Trong Đại số đồ thị hàm số bậc 2 : $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) (5) là đường parabol. Bạn đọc thấy rõ điều ấy khi đổi hệ trục Oxy đang sử dụng bằng hệ trục mới IXY bởi phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$: $\begin{cases} x = \alpha + X \\ y = \beta + Y \end{cases}$ $(\alpha; \beta)$ là toạ độ của điểm I trong hệ trục Oxy.

Trong hệ trục IXY, phương trình $y = ax^2 + bx + c$ trở thành $Y^2 = aX$. (6)

Đó là đường parabol nói ở (3) trong hệ trục IXY. Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, bởi thế (5) là đường parabol trong hệ trục Oxy.

II. CÁC BÀI TOÁN VÀ THÍ DỤ

Bài toán 1. Xác định các yếu tố của parabol

Thí dụ 1

Tìm toạ độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của mỗi parabol sau :

$(\mathcal{P}_1) : y^2 = 4x$, $(\mathcal{P}_2) : y^2 = \dfrac{x}{12}$, $(\mathcal{P}_3) : x^2 = 6y$, $(\mathcal{P}_4) : x^2 = -y$.

Lời giải

a) Xét parabol $y^2 = 4x$. Đó là *phương trình chính tắc* $y^2 = 2px$ với $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$.
Suy ra parabol $(\mathcal{P}_1)$ có : Tiêu điểm $F = (2; 0)$, đường chuẩn $x = -2$

b) Xét parabol $y^2 = \dfrac{x}{12}$. Đó là *phương trình chính tắc* $y^2 = 2px$ với $2p = \dfrac{1}{12}$

$\Leftrightarrow p = \dfrac{1}{24}$. Suy ra parabol $(\mathcal{P}_2)$ có : Tiêu điểm $F = \left(\dfrac{1}{12}; 0\right)$, đường chuẩn

$x = -\dfrac{1}{24}$.

c) Xét parabol $x^2 = 6x$. Đó là phương trình $x^2 = 2py$ với $2p = 6 \Leftrightarrow p = 3$.
Suy ra parabol $(\mathcal{P}_3)$ có : Tiêu điểm $F = (0; 3)$, đường chuẩn $x = -3$

d) Xét parabol $x^2 = -y$. Đó là phương trình $x^2 = -2py$ với $2p = -1 \Leftrightarrow p = -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra parabol $(\mathcal{P}_4)$ có : Tiêu điểm $F = \left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$, đường chuẩn $x = -\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 2. Viết phương trình parabol

Thí dụ 2

Viết *phương trình chính tắc* của parabol $(\mathcal{P})$ trong mỗi trường hợp sau :

a) Có tiêu điểm là $F(5; 0)$.

b) Điểm $M(54; -7)$ thuộc $(\mathcal{P})$.

c) Tham số tiêu $p = \dfrac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$.

d) Đường chuẩn là trục đẳng phương của hai đường tròn
$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$ và $(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - x - 6y - 7 = 0$.

Lời giải

Phương trình chính tắc của parabol $(\mathcal{P})$ có dạng $y^2 = 2px$. (1)

a) Trong phương trình (1), tiêu điểm của $(\mathcal{P})$ là $F=\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Bởi vậy $F = (5; 0)$

$\Rightarrow \frac{p}{2}=5 \Leftrightarrow p=10 \Rightarrow$ Phương trình chính tắc parabol $(\mathcal{P})$ là $y^2 = 20x$.

- $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow$ Toạ độ của M thoả mãn phương trình (1) $\Leftrightarrow (-3)^2 = 2p.54$.

$\Leftrightarrow 1 = 12p \Leftrightarrow p = \frac{1}{12}$. Thay trở lại (1) ta có $y^2=\frac{x}{6}$. (2)

Vậy (2) là phương trình parabol phải tìm.

c) Ta có $p = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Thay vào (1) có $y^2=(\sqrt{3}+1)x$. Đó là phương trình parabol phải tìm.

d) Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = x^2 + y^2 - x - 6y - 7 \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x=-3$ (2)

$\Rightarrow$ (2) là phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$

- Theo giả thiết (2) cũng là đường chuẩn của parabol $(\mathcal{P})$, nghĩa là $x=-\frac{p}{2}=-3 \Rightarrow$ $p = 6$. Thay vào (1) có $y^2=12x$.

Đó là phương trình chính tắc parabol phải tìm.

Thí dụ 3

Viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $(\mathcal{P})$ có đỉnh O, trục đối xứng là Oy và $(\mathcal{P})$ đi qua $A(8; -14)$.

b) $(\mathcal{P})$ có đỉnh O, trục đối xứng trùng với trục toạ độ và chắn trên đường thẳng (d) : $y=\frac{1}{3}$ một dây cung AB = 16 (đvd).

Lời giải

a) Phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ có đỉnh O, trục đối xứng là Oy có dạng $x^2 = my, m \neq 0$. (1)

- $(\mathcal{P})$ đi qua $A(8;-14) \Leftrightarrow$ Toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (1)

$\Leftrightarrow 64 = m.(-14) \Leftrightarrow m = -\frac{32}{7}$. Thay vào (1) có $x^2=-\frac{32}{7}y$. Đó là phương trình parabol phải tìm.

b) *Trường hợp 1* :

$(\mathcal{P})$ có trục đối xứng là Ox $\Leftrightarrow$ Phương trình dạng $y^2 = mx, m \neq 0$. (2)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(\mathcal{P})$ là $\frac{1}{3^2} = mx$. Phương trình này cho một nghiệm duy nhất $x= \frac{1}{9m} \Rightarrow$ (d) và $(\mathcal{P})$ có một điểm chung duy nhất (trái giả thiết) (3)

Trường hợp 2 :

$(\mathcal{P})$ có trục đối xứng là Oy $\Leftrightarrow$ Phương trình dạng $x^2 = my,\ m \neq 0$. (4)

Do tính đối xứng của $(\mathcal{P})$ nên từ $\begin{cases} AB \perp Ox \\ AB = 16 \end{cases} \Rightarrow AB = 2|x_A| = 4 \Rightarrow |x_A| = 2$.

Do $A \in (d) \Rightarrow y_A = \dfrac{1}{3}$.

$A \in (\mathcal{P})$ toạ độ điểm A thoả mãn phương trình (4) $\Leftrightarrow 2^2 = m \cdot \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m = 12$.

Thay m = 12 vào phương trình (3) có $x^2=12y$. (5)

Từ (3), (5) kết luận : Parabol phải tìm có phương trình chính tắc là $x^2=12y$.

Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của parabol

Thí dụ 4

Cho parabol $(\mathcal{P})$: $y^2 = 12x$. Gọi AB là một dây cung đi qua tiêu điểm của $(\mathcal{P})$. Chứng minh tích các khoảng cách từ A, B đến trục hoành là một số không đổi.

Lời giải

Tiêu điểm của parabol $(\mathcal{P})$ là F(3; 0). Phương trình đường thẳng (AB) đi qua F là $a(x - 3) + by = 0 \Leftrightarrow ax + by - 3a = 0$.

Cả A, B đều không thuộc trục Ox nên $a \neq 0$.

Ta có toạ độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y^2 = 12x \\ ax + by - 3a = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow ay^2 + 12by - 36a = 0$ (1)

Với $a \neq 0$, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $y_1y_2 = -36$. (2)

Rõ ràng khoảng cách từ A, B đến trục hoành theo thứ tự là $d_1 = |y_1|$, $d_2 = |y_2|$. Do vậy từ (2) có $d_1d_2=|y_1|.|y_2|=36$ (const) (đpcm).

Lời bình.

Thí dụ trên minh hoạ cho tính chất sau đây :

Tích các khoảng cách từ hai đầu mút của một dây cung của parabol đến trục đối xứng của nó là một số không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của dây cung ấy khi nó quay quanh tiêu điểm.

Chứng minh bài toán hoàn toàn tương tự thí dụ trên.

Thí dụ 5. (Đại học Tổng hợp Hà Nội, 1994)

Cho parabol $(\mathcal{P})$: $x^2=y$. Một góc vuông ở đỉnh O cắt parabol tại A và B.

Gọi A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc trên Ox của A, B. Chứng minh :

a) $OA_1.OA_2=const$.

b) Đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Điều kiện : Góc vuông AOB tồn tại $\Rightarrow A \neq O \neq B$

$\Rightarrow x_1x_2 \neq 0$ (1)

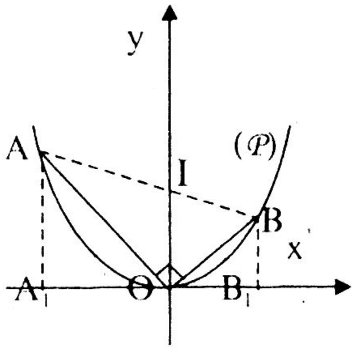
- $OA \perp OA \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$ (2)

A, B đều thuộc $(\mathcal{P}) \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = y_1 \\ x_2^2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow (x_1x_2)^2=y_1y_2$

Thay vào (2) ta có $x_1x_2 + (x_1x_2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1x_2+1)=0 \Leftrightarrow x_1x_2=-1 \Rightarrow |x_1|.|x_2|=1$ (3)

Do A_1, B_1 là hình chiếu vuông góc trên Ox của A, B $\Rightarrow OA=|x_1|, |OB|=|x_2|$ nên (2) $\Leftrightarrow OA_1.OA_2=1$ (const) (đpcm).



Hình 135

b) Phương trình đường thẳng (AB) là $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-x_1^2}{x_2^2-x_1^2}$

$\Leftrightarrow (x_2+x_1)(x-x_1)=y-x_1^2$. (4)

Do $x_1 \neq 0$ nên nhân theo vế phải (4) với x_1 có $(x_1x_2+x_1^2)(x-x_1) = x_1y-x_1^3$ (5)

Để ý $x_1x_2=-1$ suy ra (5) $\Leftrightarrow (x_1^2-1)(x-x_1)= x_1y-x_1^3 \Leftrightarrow xx_1^2+(1-y)x_1-x=0$. (6)

Điểm I là điểm cố định của đường thẳng (AB) $\Leftrightarrow$ toạ độ của I thoả mãn phương trình (6) với mọi x_1. Điều ấy có khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 0 \\ 1-y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x=0; y=1)$.

Vậy đường thẳng (AB) luôn đi qua điểm cố định I(0; 1)

Lời bình

- Từ $x_1x_2=-1 \Leftrightarrow y_1y_1=1 \Leftrightarrow AA_1.BB_1=1$.
- Thay thế parabol $(\mathcal{P}): x^2 = y$ bởi parabol $(\mathcal{P}_a): x^2 = ay$ thì kết luận định tính của bài toán vẫn không thay đổi nghĩa là $OA_1.OA_2$=const và đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định. Khi đó $OA_1.OA_2=a^2$ và điểm cố định là $I(0; a^2)$.

Thí dụ 6

Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Gọi AB là một dây cung của (P) đi qua tiêu điểm của (P). Chứng minh đường thẳng đường kính AB luôn tiếp xúc với đường chuẩn của parabol ấy.

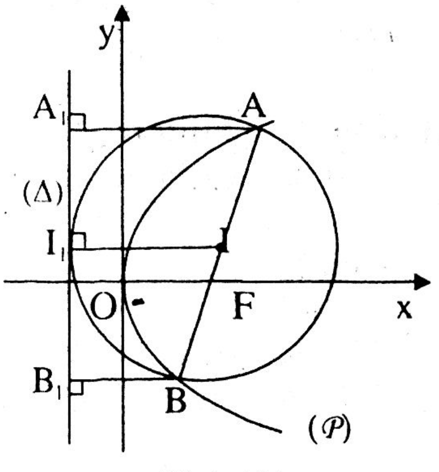
Lời giải

Gọi F, (Δ) theo thứ tự là tiêu điểm của của ($\mathcal{P}$) và I là trung điểm của AB.

Lại gọi A_1, B_1, I_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của của A, B, I trên đường thẳng (Δ).

Hình thang A_1ABB_1 có I_1I là đường trung bình nên

$d(I; (\Delta))=II_1=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)$. (1)



Hình 136

Do A, B thuộc parabol và AB đi qua tiêu điểm F của parabol nên

$$AA_1+BB_1=AF+BF=AB \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $d(I;(\Delta))=\frac{1}{2}AB$, bởi thế đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn (Δ). (đpcm). (h. 136).

Thí dụ 6

Cho parabol $(\mathcal{P})$: $y^2 = ax$, $(a \neq 0)$. Điểm $M \in (\mathcal{P})$, $M \neq O$. Gọi A, B theo thứ tự là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Chứng minh khi M thay đổi :

a) Đường thẳng qua B vuông góc với OM luôn đi qua một điểm cố định.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

a) Gọi toạ độ của M là $(x_0; y_0) \Rightarrow$ toạ độ các điểm $A(x_0; 0)$, $B(0; y_0)$.

Gọi (d_1) là đường thẳng qua B và $(d_1)\perp OM$. Gọi $B_1=(d_1)\cap Ox$

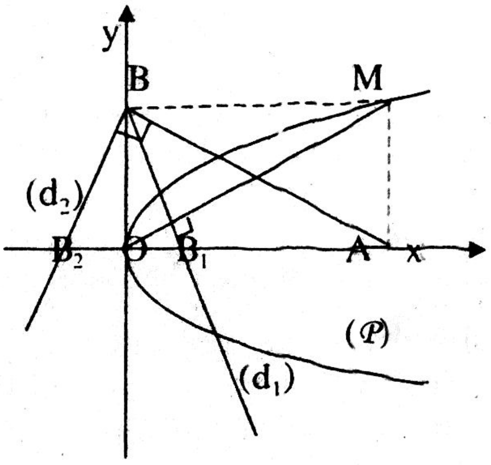
Rõ ràng $\angle OBB_1=\angle MOA$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Lại có $\angle BOA=\angle OAM=90^0$

nên $\Delta BOA \sim \Delta OAM \Rightarrow \dfrac{OB_1}{AM}=\dfrac{OB}{OA}$

$\overline{OB_1}.\overline{OA}=\overline{OB}.\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{OB_1}.x_0=y_0^2 \quad (1)$



- $\begin{cases} M \in (P) \\ M \neq O, a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0^2 = ax_0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$

Thay vào (1) có $\overline{OB_1}.x_0=ax_0$

$\Leftrightarrow \overline{OB_1}=a$ hay $B_1=(a; 0)$.

Vậy khi M thay đổi, đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm cố định $B_1(a; 0)$.

b) Tương tự với cặp tam giác đồng dạng ΔBOB_2 và ΔAOB_2 suy ra đường thẳng (d_2) luôn đi qua điểm cố định $B_2(-a; 0)$.

Lời bình

Bạn đọc có thể viết phương trình đường thẳng (d_1), (d_2) theo tham số x_0, y_0 rồi tìm điểm cố định như cách đã làm ở Thí dụ 4§3 ở trên.

Bài toán 4. Tương giao giữa parabol với đường thẳng, giữa parabol với parabol

Thí dụ 7

Định lý :

Chứng minh rằng để đường thẳng (d) : $Ax + By + C = 0$ có điểm chung với parabol $(\mathcal{P})$: $y^2 = 2px$, điều kiện cần và đủ là $B^2p \geq 2AC$. (1)

Lời giải

- (d) và $(\mathcal{P})$ có điểm chung $\Leftrightarrow$ hệ $(*)\begin{cases}Ax + By + C = 0\\ y^2 = 2px\end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}2Apx + 2Bpy + 2Cp = 0\\ y^2 = 2px\end{cases} \Rightarrow Ay^2 + 2Bpy + 2Cp = 0$ (2)

Hệ $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm .

Trường hợp 1 : $A \neq 0$. Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow B^2p^2 \geq 2ACp$
$\Leftrightarrow B^2p \geq 2AC$ (đpcm) (3)

Trường hợp 2 : $A=0$ $(B\neq 0)$. Ta có (2) $\Leftrightarrow By + C = 0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{C}{B}$

Rõ ràng (1) đúng và (2) luôn có nghiệm $y=-\dfrac{C}{B}$.

Vậy định lý được chứng minh.

Chú ý

- $B^2p \geq 2AC \Leftrightarrow (d)$ và $(\mathcal{P})$ có hai điểm chung. Ta nói (d) *cắt* $(\mathcal{P})$.
- $B^2p = 2AC \Leftrightarrow (d)$ và $(\mathcal{P})$ có một điểm chung. Ta nói (d) và $(\mathcal{P})$ *tiếp xúc với nhau*.
- $B^2p < 2AC \Leftrightarrow (d)\cap(\mathcal{P}) = \varnothing$. Ta nói (d) *không cắt* $(\mathcal{P})$.
- Từ kết quả trên suy ra : $AC \leq 0$ thì ắt hẳn (d) cắt $(\mathcal{P})$.

Thí dụ 8

Xét vị trí tương đối giữa parabol $(\mathcal{P}) : y^2 = 8x$ với mỗi một đường thẳng sau đây : $(d_1) : x - 5y + 3 = 0$, $(d_2) : 5x + y + 2 = 0$, $(d_3) : 9x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải

- Parabol $(\mathcal{P}) : y^2 = 8x$ có tham số là $p = 4$.

a) Xét cặp $(\mathcal{P})$ và (d_1) có $B^2p = (-5)^2.4 = 25$, $2AC = 2.1.3 = 6 \Rightarrow B^2p > 2AC$
$\Rightarrow (d_1)$ cắt $(\mathcal{P})$.

b) Xét cặp $(\mathcal{P})$ và (d_2) có $B^2p = 1^2.4 = 4$, $2AC = 2.5.2 = 20 \Rightarrow B^2p < 2AC$
$\Rightarrow (d_1)$ không cắt $(\mathcal{P})$.

c) Xét cặp $(\mathcal{P})$ và (d_3) có $B^2p = (-3)^2.4 = 36$, $2AC = 2.9.2 = 36 \Rightarrow B^2p = 2AC$
$\Rightarrow (d_1)$ và $(\mathcal{P})$ tiếp xúc với nhau.

Thí dụ 9 (Đề 150)

Cho điểm $A(3; 0)$, parabol $(\mathcal{P}) : y=x^2$ và M là một điểm thuộc $(\mathcal{P})$ có hoành độ $x=a$. Tính độ dài AM. Xác định vị trí điểm để đoạn AM ngắn nhất.

Lời giải

Điểm $M\in(\mathcal{P})$ có hoành độ bằng a suy ra $M(a; a^2)$

$AM^2 = (a-3)^2 + a^4 = a^2 - 6a + 9 + a^4 = 3(a-1)^2 + (a^2-1)^2 + 5 \geq 5.$

Dấu đẳng thức có khi a=1. Suy ra AM=$\sqrt{5}$ là độ dài ngắn nhất của AM. Khi đó điểm M phải tìm có toạ độ là M=(1; 1).

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm toạ độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của mỗi parabol sau :

$$(\mathcal{P}_1) : y^2=8x,\ (\mathcal{P}_2) : y^2=\frac{x}{6},\ (\mathcal{P}_3) : x^2=12y,\ (\mathcal{P}_4) : x^2=-4y.$$

Bài 2. Viết *phương trình chính tắc* của parabol ($\mathcal{P}$) trong mỗi trường hợp sau :

a) Có tiêu điểm là F(1; 0).

b) Điểm M(1; −1) thuộc ($\mathcal{P}$).

c) Tham số tiêu $p=\dfrac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

d) Đường chuẩn là trục đẳng phương của hai đường tròn

$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 + 4x + 7y + 1 = 0$ và $(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - 2x + 7y - 7 = 0$.

Bài 3. Viết phương trình của parabol ($\mathcal{P}$) trong mỗi trường hợp sau :

a) ($\mathcal{P}$) có đỉnh O, trục đối xứng là Oy và ($\mathcal{P}$) đi qua A(3;−27).

b) ($\mathcal{P}$) có đỉnh O, trục đối xứng trùng với trục toạ độ và chắn trên đường thẳng (d) : y=9 một dây cung AB = 25 (đvd)

Bài 5. Cho parabol ($\mathcal{P}$) : $y=2x^2$ và hai điểm A(2; −2), B(8; 4). Gọi M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của ($\mathcal{P}$). Tìm điểm M sao cho tam giác AMB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 6. (Đề 35)

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol ($\mathcal{P}$) và đường thẳng (d) với

$(\mathcal{P}) : y=\dfrac{x^2}{2}$, (d) : $2mx - 2y + 1 = 0$

1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, (d) luôn đi qua tiêu điểm F của ($\mathcal{P}$) và cắt ($\mathcal{P}$) tại hai điểm phân biệt M, N.Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng MN khi m thay đổi.

2) Viết phương trình đường tròn đường kính MN.

Bài 7. Cho đường tròn ($\mathcal{C}$) tâm O bán kính R và ∈(Δ) là một tiếp tuyến tại điểm A cố định thuộc ($\mathcal{C}$). Giả sử M là một điểm thay đổi trên mặt phẳng sao cho MT=MH, trong đó H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ) còn T là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ M đến ($\mathcal{C}$). Chứng minh rằng đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chương I. VECTƠ

§1. Kiến thức cơ bản 5
§2. Bài toán và thí dụ 6
Bài toán 1. về hai vectơ không cùng phương 6
Bài toán 2. Xác định điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ cho trước 10
Bài toán 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng 13
Bài toán 4. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định 27
Bài toán 5. Tập hợp điểm thoả mãn một đẳng thức vectơ hoặc độ dài vectơ 29
Bài tập 33
§2. Tỉ số lượng giác của một góc bất kì 37
Bài tập 45
§3. Tích vô hướng của hai vectơ 46
I. Kiến thức cơ bản 46
II. Các thí dụ 48
Bài tập 60

Chương II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1. Hệ thức lượng trong tam giác 67
I. Kiến thức cơ bản 67
II. Các thí dụ 68
Bài tập 99
§2. Hệ thức lượng trong đường tròn 108
I. Kiến thức cơ bản 108
II. Các thí dụ 110
Bài tập 120

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Đường thẳng 125
I. Kiến thức cơ bản 128
II. Các bài toán và kỹ thuật cơ bản 128
Bài toán 1. Viết phương trình đường thẳng xác định tường minh 129
Kỹ thuật 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm 130
Kỹ thuật 2. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và có phương cho trước 132
Kỹ thuật 3. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc, song song với đường thẳng (Δ) cho trước 133
Kỹ thuật 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm và hợp với đường thẳng (Δ) một góc cho trước 137
Kỹ thuật 5. Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp chùm 138

Bài toán 2.
Xác định hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng 138
Kỹ thuật 6. Xác định hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường thẳng $(\Delta) : Ax+By+C=0$ 138
Bài toán 3.
Xác định điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng (Δ) cho trước 140
Kỹ thuật 7. Xác định điểm A' đối xứng với điểm $A(x_A; y_A)$ qua đường thẳng (Δ): $Ax+By+C=0$ cho trước 141
III. Các bài toán thường vận dụng 141
Bài toán 4. Viết phương trình đường thẳng (Δ') đối xứng với đường thẳng (Δ) cho trước qua một điểm I cho trước 141
Kỹ thuật 8. Viết phương trình đường thẳng (Δ') đối xứng với đường thẳng $(\Delta) : Ax+By+C=0$ cho trước qua điểm $I(x_1; y_1)$ cho trước 141
Bài toán 5
Viết phương trình đường phân giác trong của tam giác 142
Kỹ thuật 9.
Viết phương trình đường phân giác trong của tam giác 142
IV. Các bài toán phối hợp nhiều kỹ năng 146
Bài toán 6. Viết phương trình đường thẳng $\overline{MA} = k\overline{MB}$ 151
Bài toán 7. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song 165
Bài toán 8. Xác định điểm thuộc miền góc nhọn, góc tù 169
Bài toán 9. Viết phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù tạo bởi hai đường thẳng 171
Kỹ thuật 10. Viết phương trình đường phân giác giác góc nhọn, góc tù tạo bởi hai đường thẳng 171
V. Vài bài toán khác 172
Bài tập 175
§2. Đường tròn 187
I. Kiến thưc cơ bản 187
II. Các bài toán và kỹ thuật cơ bản 188
Bài toán 1. Nhận dạng phương trình đường tròn 191
Bài toán 2. Viết phương trình đường tròn 192
Kỹ thuật 1. Viết phương trình đường tròn biết đường kính 195
Kỹ thuật 2. Viết phương trình đường tròn qua ba điểm 197
Kỹ thuật 3. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác 197
Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn 197
Kỹ thuật 4. Viết phương trình đường tròn tiếp tuyến của đường tròn tại tiếp điểm 197
Kỹ thuật 5. Viết phương trình đường tròn tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ một điểm cho trước 199
Kỹ thuật 6. Viết phương trình đường tròn tiếp tuyến của đường tròn có phương cho trước 202

Bài toán 3. Đường tròn và sự tiếp xúc 204
Bài toán 4. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn 210
Bài toán 5. Chùm đường tròn 214
Kỹ thuật 7.
Viết phương trình đường tròn bằng phương pháp chùm 215
III. Các bài toán phối hợp nhiều kỹ năng 218
Bài tập 222
§3. Đường elip 223
I. Kiến thức cơ bản 223
II. Các bài toán và thí dụ 226
Bài toán 1. Xác định các yếu tố của elip 226
Bài toán 2. Viết phương trình của elip 231
Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của elip 240
Bài toán 4. Tập hợp điểm của elip 243
Bài toán 5. Tương giao giữa elíp với đường thẳng, elíp với elip 245
Bài tập 245
§2. Đường hypebol 245
I. Kiến thức cơ bản 248
II. Bài toán và thí dụ 248
Bài toán 1. Xác định các yếu tố của hypebol 248
Bài toán 2. Viết phương trình của hypebol 251
Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của hypebol 254
Bài toán 4. Tương giao giữa hypebol với đường thẳng, giữa hypebol với hypebol 257
Bài toán 5. Tập hợp điểm với hypebol 259
Bài tập 262
§3. Đường parabol 264
I. Kiến thức cơ bản 264
II. Các bài toán và thí dụ 265
Bài toán 1. Xác định các yếu tố của hypebol 265
Bài toán 2. Viết phương trình của hypebol 266
Bài toán 3. Chứng minh một số tính chất của hypebol 268
Bài toán 4. Tương giao giữa parabolvới đường thẳng, giữa parabol với parabol 271

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:
Biên tập: ĐẶNG CHIẾN CÔNG
NGUYỄN HỮU TÚ

Trình bày bìa: THÁI HỌC

BỒI DƯỠNG HÌNH HỌC LỚP 10

Mã số: 1L - 68 ĐH 2006

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Chi nhánh Công ti Phát triển Công nghệ và Truyền hình - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 85 - 2006/CXB/ 2 – 01/ĐHQGHN, ngày 24/01/2006.

Quyết định xuất bản số: 185 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.